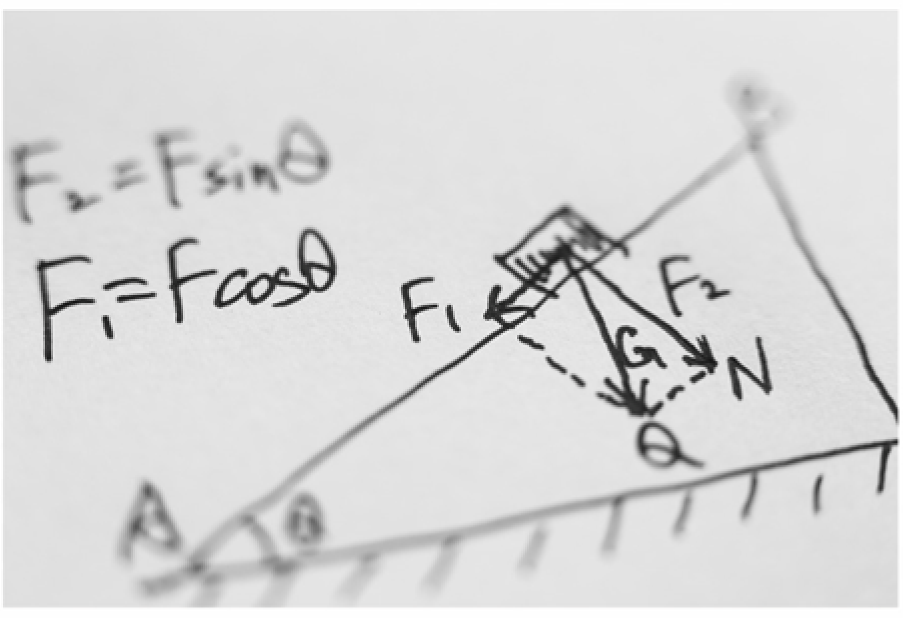
UTN FRCH
FACULTAD REGIONAL CHUBUT

SEMINARIO UNIVERSITARIO

MATEMÁTICA

CUADERNILLO TEÓRICO



EJE 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjuntos numéricos

Una lista o colección de objetos es un conjunto. Se denota mediante letras mayúsculas.

Ejemplo. $A{:}\{1,2,3\}$ es el conjunto de los tres primeros números naturales.

Los elementos de un conjunto se encierran entre llaves y se separan entre sí con comas.
Un conjunto puede expresarse por extensión (enumerando todos los elementos que lo constituyen) o por comprensión (brindando las propiedades que lo definen).

Ejemplo. $A{:}\{a,e,i,o,u\}$ extensión
$B{:}\{x \mid x\ es\ una\ vocal\}$ comprensión

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, aunque estén repetidos o desordenados.

Ejemplo. $A{:}\{1,2,3\}$; $B{:}\{2,3,1\}$; $C{:}\{1,3,1,2\}$
$A = B = C$

Un conjunto es vacío cuando carece de elementos. Se denota $\emptyset$

Ejemplo. $H{:}\{personas\ vivas\ de\ más\ de\ 200\ años\ de\ edad\}$
$G{:}\left\{x \mid x^2 = 4\ y\ x\ es\ impar\right\}$
$H = G = \emptyset$

<u>Observaciones:</u>

- El conjunto $\emptyset$ no tiene elementos
- El conjunto $\{\emptyset\}$ no está vacío: tiene un elemento, que es el conjunto vacío; es un conjunto de conjuntos.
- El conjunto universal $\cup$ contiene todos los elementos de los que se está tratando.

Operaciones entre conjuntos

Sean los conjuntos $A{:}\{3,4,5\}$ y $B{:}\{1,3,5\}$ se pueden definir las siguientes operaciones:

Unión $(\boldsymbol{A \cup B})$: es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o B
$(A \cup B) = \{1,3,4,5\}$

Intersección $(\boldsymbol{A \cap B})$: es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B
$(A \cap B) = \{3,5\}$

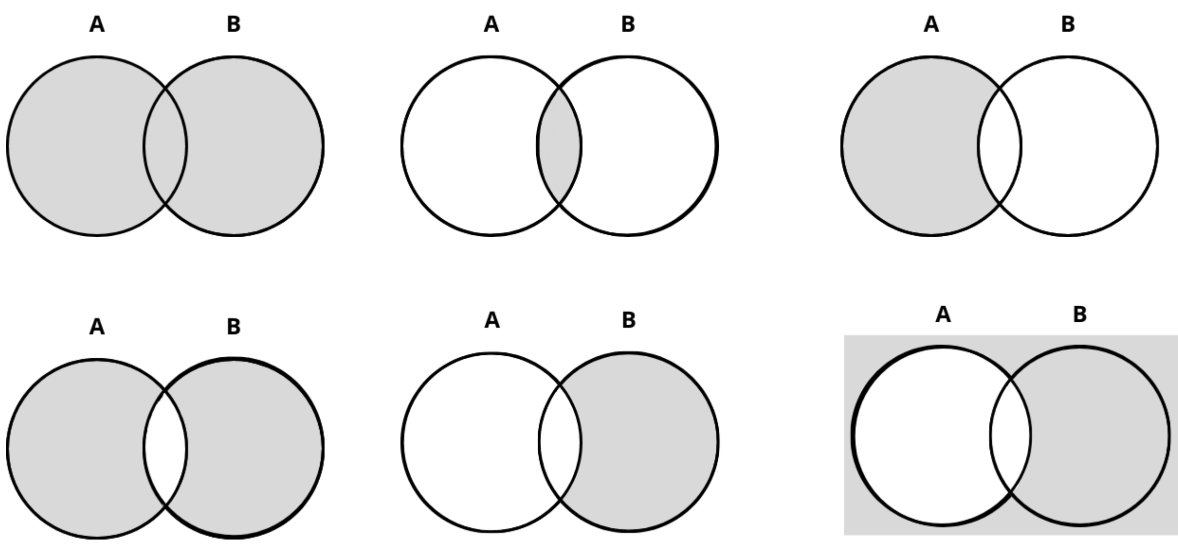
Diferencia $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$**:** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B
$(A-B) = \{1,4\}$

Diferencia simétrica $(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$**:** es el conjunto de los elementos que sólo pertenecen a A o a B
$(A\Delta B) = \{1,4\}$

Complemento $(\boldsymbol{A^C})$**:** es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A
$(A^C) = \{1\}$

En lenguaje simbólico:

$(A \cup B) = \{x \,/\, (x \in A) \ \vee \ (x \in B)\}$
$(A \cap B) = \{x \,/\, (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)\}$
$(A - B) = \{x \,/\, (x \in A) \ \wedge \ (x \notin B)\}$
$(A\Delta B) = \{x \,/\, (x \in A) \ \vee \ (x \in B) \ \wedge \ (x \notin (\mathrm{A} \wedge B))\}$
$(A^C) = \{x \,/\, (x \notin A)\}$



Cardinalidad de un conjunto

Es el número de elementos de un conjunto A y se denota $n(A)$.

Ejemplo. Determinar el número cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos

1. A:$\{1,3,5,7\}$
A tiene cuatro elementos, entonces $n(A) = 4$.

2. B:$\{x \mid x \text{ } es \text{ } un \text{ } país \text{ } de \text{ } Norteamérica\}$

B tiene tres elementos, entonces $n(B) = 3$.

3. C:∅

C no tiene elementos, entonces $n(C) = 0$.

Para pensar. ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto D:{∅}?

Conjuntos numéricos

Los números naturales N son aquellos que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío.

$$N:\{1,2,3,\ldots\}$$

Este conjunto es infinito (siempre se puede agregar un número más, sumando 1), es ordenado (tiene un primer elemento - el 1 - pero no último) y es discreto (porque entre 2 números naturales existe un número finito de números naturales).

La operación básica que surge asociada a este conjunto es la adición: la suma de dos números naturales resulta en otro número natural. Lo mismo ocurre con el producto. La resta entre dos números naturales a y b, $(a-b)$ es posible siempre y cuando $a > b$.

Ejemplo. Si $a = 11$ y $b = 7$, entonces

Como $a > b$, $(a - b) \in N$

$11 - 7 = 4$ y $4 \in N$

Si $a = b$, surge un número no definido para N: el número 0. Normalmente, se amplía el conjunto N y se lo denota como:

$$N^{+0}:\{0,1,2,\ldots\}$$

Para poder calcular la resta cuando $a < b$, el conjunto de números N fue ampliado adicionando a los negativos. De ese modo,

Si $a = 7$ y $b = 11$, entonces
Como $a < b$, $(a - b) = -4 \notin N$

Los números enteros Z incluye a los naturales, el cero y a los números negativos.

$$Z{:}\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

De esta manera, $N \subset \mathrm{Z}$

El conjunto Z es infinito, ordenado y discreto, pero no tiene un primer ni último término.

Al definir la operación cociente o división, es necesario ampliar el conjunto de números, incorporando a los que pueden expresarse como fracción de dos enteros.

Los números racionales Q son números que se pueden expresar como fracción $\frac{n}{m}$, donde n y m son enteros y $m \neq 0$.

Puede verse que cualquier entero (y por ende cualquier número natural) puede escribirse como racional, haciendo $m = 1$, ya que $N \subset Z \subset Q$.

Los números racionales (llamados también fraccionarios) se pueden expresar por medio de una expresión decimal finita o infinita periódica. La recíproca también es cierta. Q es infinito, ordenado y denso (entre dos números racionales existen infinitos racionales)

Algunos números, sin embargo, no pueden expresarse como cociente de dos números enteros.

Los números irracionales I son números que no se pueden expresar como una razón

Ejemplos. $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$

$\pi = 3{,}14159265358\ldots$

$e = 2{,}71828\ldots$

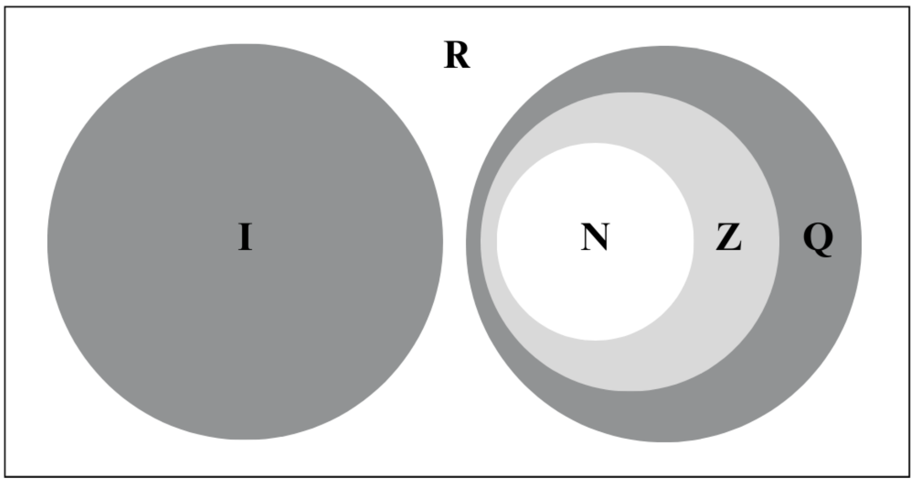
$Q \cap I = \emptyset$, es decir, no hay elementos comunes entre ambos conjuntos, pero sí $Q \cup I = R$.

La unión del conjunto Q de números racionales y el conjunto de los números irracionales I es el conjunto de los números reales R.

Todos los números que hemos estudiado hasta el momento son números reales. El conjunto de los números reales también puede representarse sobre una recta. A cada número real le corresponde un único punto de la recta, y cada punto de la recta representa un único punto real. A esta recta la llamamos recta real.

Los números complejos C son números de la forma $(a + bi)$, donde a es la parte real y b es la parte imaginaria.

Todo número real es complejo, basta con que $b = 0$. Entonces, $R \subset C$



Propiedades de las operaciones

- **Adición:** La adición de números (sumandos) da por resultado otro número denominado suma. La adición es una operación cerrada para N, Z, Q, R y C: al sumar 2 números del conjunto se obtiene otro número que pertenece al mismo conjunto.

- **Sustracción:** La sustracción de dos números da por resultado otro número denominado resta o diferencia. La sustracción es cerrada en $Z,Q,R\ y\ C$; no verifica en

Propiedades de la adición

Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Conmutativa $a + b = b + a$

Elemento neutro $a + 0 = a$

Elemento inverso $a + (-a) = 0$

Propiedades de la sustracción

Elemento neutro $a - 0 = a$

Para pensar. ¿La sustracción cumple con la propiedad asociativa? ¿Y con la propiedad conmutativa?

N. La sustracción se puede escribir como una adición:

- **Multiplicación:** La multiplicación de dos números (llamados factores) da por resultado otro llamado producto. La multiplicación es cerrada en $\boldsymbol{N},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}\ y\ \boldsymbol{C}$.

- **División:** La división de dos números (llamados dividendo y divisor) da por resultado otro número llamado cociente o razón. El divisor debe ser distinto de cero. La división

Propiedad distributiva

La multiplicación y la división son distributivas con respecto a la adición y a la sustracción.

Multiplicación

$a(b + c) = a.b + a.c$

$a(b - c) = a.b - a.c$

División

$a/(b + c) = a/b + a/c$

$a/(b - c) = a/b - a/c$

es cerrada en $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}\ y\ \boldsymbol{C}$, porque la división de dos números naturales o enteros puede dar como resultado un número no natural o no entero.

- **Potencia:** la potencia n de un número a es el producto repetido n veces de la base a, donde n es el exponente:

$$a^n = a.a.a.....a$$

Debe tenerse en cuenta que

$a \in R, a \neq 0,\ a^0 = 1$
$a,n \in N, \qquad 1^n = 1 \quad y \quad 0^n = 0$
$a \in R \wedge \square \in N \qquad a^{-n} = 1/a^n$

Propiedades de la potenciación

Multiplicación de potencias de igual base $\quad a^n.a^m = a^{n+m}$

División de potencias de igual base $\quad a^n/a^m = a^{n-m}$

Potencia de potencia $\quad (a^n)^m = a^{n.m}$

Distributiva con respecto a la multiplicación y a la división

$(a.b)^n = a^n.b^n$

$(a/b)^n = a^n/b^n$

La potencia no es distributiva con respecto a la suma y a la resta

- **Radicación:** Es la operación inversa a la potenciación.

Propiedades de la radicación

Sean $a, b \in R$ y $m,n \in N$:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ si $a > 0$

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como producto de nuevas expresiones más simples. A continuación presentamos algunos casos de factorización.

1. **Factor común.** Se llama factor común al número o variable que se encuentra presente en todos los términos de la expresión algebraica.

   Ejemplo. $P(x) = 16x^3 + 8x^2 - 2x + 4$ Factor común: 2

   $P(x) = 2.(8x^3 + 4x^2 - x + 2)$

2. **Trinomio cuadrado perfecto ↔ Cuadrado de un binomio.** La forma general de un trinomio cuadrado perfecto es $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ejemplo. $P(x) = 9x^2 + 30x + 25$

Identificamos las bases a y b, ya que

$9x^2 = (3x)^2$

$25 = (5)^2$

Por último, verificamos que el tercer término es el doble del múltiplo de las bases

$2.3x.5 = 30x$

Por último, podemos expresar el polinomio como:

$P(x) = 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$

3. **Diferencia de cuadrados.** La forma general de la diferencia de cuadrados es $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

   Ejemplo. $x^2 - 4$

Identificamos que

$x^2 = (x)^2$

$4 = (2)^2$

Por lo tanto,

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

Expresiones algebraicas racionales. Simplificación

Las operaciones con expresiones algebraicas racionales son similares a las operaciones entre fracciones. De esta forma, para sumar dos de estas expresiones debemos factorizar el denominador y encontrar un denominador común.

Ejemplo.

$$\frac{a^2}{a^2+3a} + \frac{a+9}{a^2+6a+9} - 1 =$$

$$\frac{a^2}{a(a+3)} + \frac{a+9}{(a+3)^2} - 1 =$$

$$\frac{a}{(a+3)} + \frac{a+9}{(a+3)^2} - 1 =$$

$$\frac{a(a+3)+a+9-(a+3)^2}{(a+3)^2} =$$

$$\frac{a^2+3a+a+9-a^2-6a-9}{(a+3)^3} = \frac{2a}{(a+3)^3}$$

También la multiplicación y la división de expresiones algebraicas racionales es similar al caso de las fracciones. Para simplificar expresiones debemos, en primer lugar, factorizar numeradores y denominadores.

$$\frac{a^2+6ab+9b^2}{a^{-2}+(3b)^{-2}} : \frac{a^2b+3ab^2}{6b-2a} =$$

$$\frac{(a+3b)^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}} : \frac{ab(a+3b)}{2(3b-a)} =$$

$$\frac{a+3b}{\frac{9b^2-a^2}{9a^2b^2}} : \frac{ab}{2(3b-a)} =$$

$$\frac{(a+3b)9a^2b^2}{(9b^2-a^2)} : \frac{ab}{2(3b-a)} =$$

$$\frac{(a+3b)9a^2b^2}{(3b-a)(3b+a)} : \frac{ab}{2(3b-a)} =$$

$$\frac{9a^2b^2}{(3b-a)}:\frac{ab}{2(3b-a)}=18ab$$

Racionalización

En ciertas expresiones en las que intervienen raíces es conveniente transformar el numerador o el denominador en un número entero. Para ello, se utilizan dos casos de factorización: cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados.

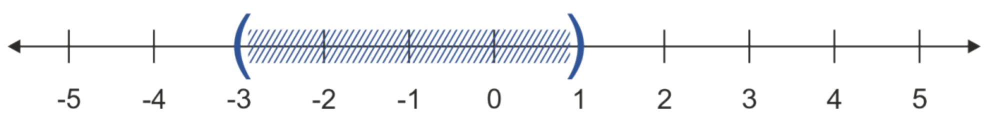
Ejemplos.

1. $\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{13}).\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{2.\sqrt{3}-\sqrt{13.3}}{3}=\frac{2.\sqrt{3}-\sqrt{39}}{3}$

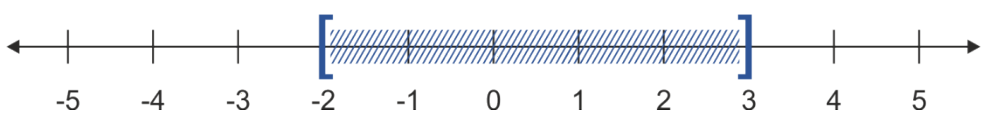
2. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=5-2\sqrt{6}$

Intervalos

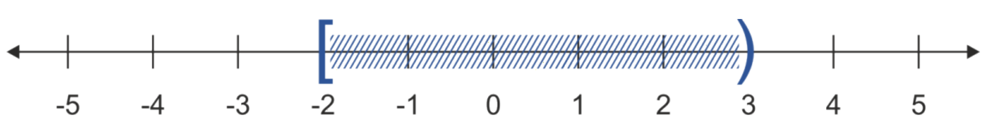
Intervalo abierto $\{(x\in R)\wedge(-3<x<1)\}=(-3,1)$



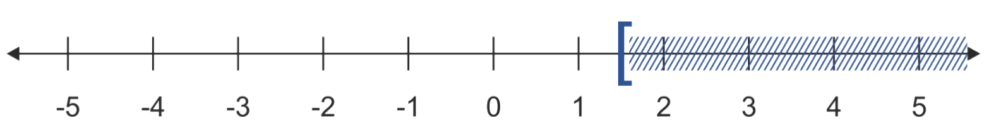
Intervalo cerrado $\{(x\in R)\wedge(-2\leq x\leq 3)\}=[-2,3]$



Intervalo semiabierto o semicerrado $\{(x\in R)\wedge(-2\leq x<3)\}=[-2,3)$



Intervalo infinito $\{(x\in R)\wedge(1{,}5\leq x)\}=(1{,}5,+\infty)$



Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es su valor positivo. Es decir,

Si $x \geq 0$, $|x| = x$

Ejemplo. $5 > 0$. Entonces $|5| = 5$

Si $x < 0$, $|x| = -x$

Ejemplo. $-5 < 0$. Entonces $|-5| = -(-5) = 5$

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas con una o más incógnitas. Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la/s incógnita/s con los que se logra una igualdad.

Para resolver una ecuación tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo a un lado del signo "igual". Veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación

Propiedades de la igualdad

Propiedad	**Descripción**
1. $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \Leftrightarrow CA = CB \; (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una ecuación lineal, o ecuación de primer grado, que

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal en una variable tiene la forma

$$ax + b = 0$$

con $a,b \in R$ y $a \neq 0$.

es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

Vemos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	Ecuaciones no lineales
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$
$x - 6 = \frac{x}{3}$	$\frac{3}{x} - 2x = 1$

Ejemplos.

Resuelva la siguiente ecuación: $3x - 1 = -2x + 4$

Solución

$$3x - 1 = -2x + 4$$

$$3x = -2x + 4 + 1$$

$$3x + 2x = 5$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

$$S{:}\{1\}$$

Si se reemplaza la solución en ambos lados de la igualdad original, veremos que la solución satisface la ecuación:

$$3(1) - 1 = -2(1) + 4$$

$$3 - 1 = -2 + 4$$

$$2 = 2$$

Resuelva la siguiente ecuación: $5-2(x+3)=-\frac{1}{2}(4x+2)$

Solución

$$5-2x-6=-2x-1$$

$$-2x+2x=-1-5+6$$

$$0x=0$$

$$S:\{R\}$$

Cualquier $x \in R$ es solución de la ecuación. Es decir, la ecuación tiene infinitas soluciones.

Resuelva la siguiente ecuación: $3x-1=6(\frac{1}{2}x+5)$

Solución

$$3x-1=6(\frac{1}{2}x+5)$$

$$3x-1=3x+30$$

$$3x-3x=30+1$$

$$0x=31$$

$$S:\{\emptyset\}$$

No existe ningún valor que satisfaga la ecuación.

Ecuaciones cuadráticas

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática tiene la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

con $a,b,c \in R$ y $a \neq 0$.

Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos.

Resuelva la siguiente ecuación: $x^2 + 8x + 15 = 0$

Solución

Identificamos que $a = 3, b = -5$ y $c = -1$, y aplicamos la resolvente:

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4.1.15}}{2.1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-8 \pm 2}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

$S{:}\{-5; -3\}$

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de la raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina **discriminante** de la ecuación. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real. Por último, si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Discriminante

El discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $b^2 - 4ac$.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Sistemas de ecuaciones lineales

En algunas situaciones, interesa analizar si existen o no valores que verifican condiciones que se cumplan simultáneamente y, en el caso de que existan, averiguar de qué valores se trata.

Sistemas de ecuaciones lineales

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, & con\ a{,}b\ no\ simultáneamente\ nulos \\ dx + ey + f = 0, & con\ a{,}b\ no\ simultáneamente\ nulos \end{cases}$$

Resolución analítica de los sistemas de ecuaciones

Trataremos ahora de hallar la solución simultánea de varias ecuaciones lineales, esto es, deseamos encontrar los valores de las incógnitas que verifiquen todas las ecuaciones planteadas al mismo tiempo.

Nos interesamos en dar solución a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, usualmente llamados sistemas de 2x2.

Son varios los métodos que podemos emplear para dar solución a los problemas.

I. Sustitución

$$\begin{cases} y - 2x = -3 & (1) \\ y - x = 2 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) despejamos el valor de y y lo sustituimos en la ecuación (2).

$y = -3 + 2x \quad (*)$

Reemplazando (*) en la ecuación (2) tenemos:

$(-3 + 2x) - x = 2$

$-3 + 2x - x = 2$

$x = 2 + 3$

$x = 5$

Si $x = 5$ hallamos el valor de y reemplazando en (*).

$y = -3 + 2.5$

$y = 7$

Entonces la solución del sistema en el par de valores de x e y es $S{:}\{5;7\}$

La solución de este sistema es **única**. El sistema se denomina **compatible determinado**.

II. Eliminación por suma o resta

$$\begin{cases} y - x = 1 & (1) \\ 2y - 2x = -6 & (2) \end{cases}$$

Encontramos la ecuación equivalente de (2), dividiendo miembro a miembro por 2 toda la ecuación. El sistema entonces tiene la forma:

$$\begin{cases} y - x = 1 & (1) \\ y - x = -3 & (2) \end{cases}$$

Restando a ambos miembros estas ecuaciones se obtiene: $0 = 4$

Expresión absurda que nos indica que el sistema no tiene solución ¿Cómo resultan geométricamente las rectas que indica el sistema?

La primera ecuación: $y = x + 1,$ se trata de una recta de pendiente 1 y ordenada al origen 1. De la segunda ecuación: $y = x - 3$ se identifica la ecuación de una recta de pendiente 1 y ordenada al origen -3.

Llegamos entonces a la conclusión que las rectas que representan las ecuaciones del sistema tienen la misma pendiente, es decir, son paralelas. De aquí que el sistema sea **incompatible**. $S{:}\{\emptyset\}$

III. Igualación

Este método consiste en despejar de ambas ecuaciones del sistema la misma incógnita, y luego igualar las expresiones obtenidas.

$$\begin{cases} y = x + 1 & (1) \\ 2y = 2x + 2 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y de la ecuación (2) para luego igualar las expresiones obtenidas

$$\begin{cases} y = x + 1 & (1) \\ y = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Ahora, si los primeros miembros son iguales, los segundos también los son, entonces:

$$x + 1 = x + 1$$

Lo que nos expresa que las dos ecuaciones del sistema son idénticas, esto es, desde el punto de vista geométrico, representan la misma recta. En consecuencia, la solución de la recta son los infinitos puntos de la recta a la que ambas ecuaciones hacen referencia. En este caso decimos que el sistema es **compatible indeterminado.**

Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

Encontrar soluciones comunes a dos o más ecuaciones lineales es resolver un sistema de ecuaciones lineales. Para eso, utilizando propiedades de las igualdades, pueden transformarse las ecuaciones en otras equivalentes en su expresión general.

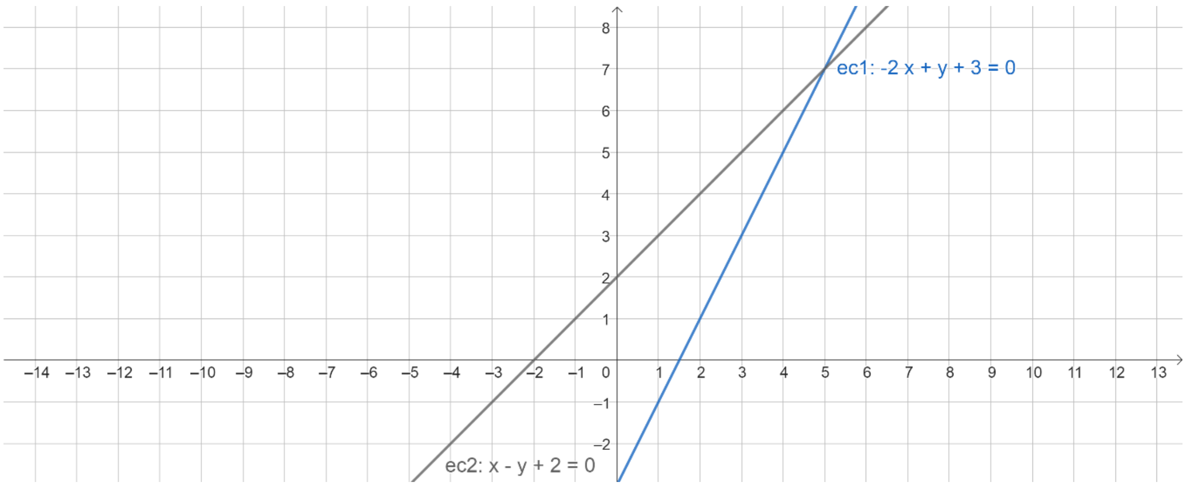
Ejemplo.

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x + 1) \\ x + 1 = y - 1 \end{cases}$$

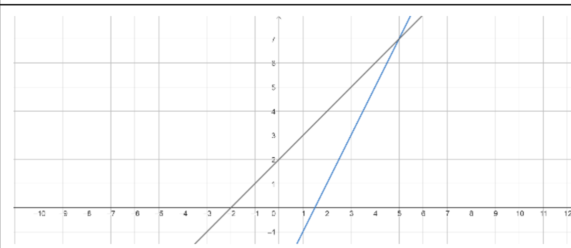
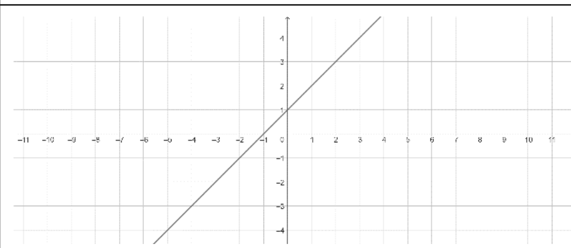
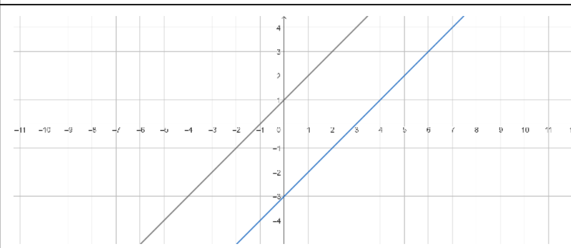
Puede escribirse de la forma general como

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Luego, pueden representarse gráficamente ambas ecuaciones y determinar, si existe, el punto o los puntos de intersección de ambas gráficas.



En general, si es posible graficar las rectas que representan ambas ecuaciones, pueden darse tres casos:

Denominación		**Soluciones**	**Sistema**	**Gráfica**
Compatible	Determinado	Única	$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 2 \end{cases}$	
	Indeterminado	Infinitas	$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = 2x + 2 \end{cases}$	
Incompatible		No tiene	$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$	

Inecuaciones

Una inecuación es una propuesta de desigualdad. Las relaciones numéricas que se expresan con los signos " $<$ " y " $>$ " se llaman desigualdades y las relaciones algebraicas correspondientes se llama inecuaciones.

Ejemplo.

$$3x + 2 > 5$$

$$3x > 5 - 2$$

$$3x > 3$$

$$x > 1$$

Inecuaciones lineales con una variable

Son expresiones que pueden llevarse a alguna de las siguientes formas, donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

$ax + b < 0$ $\quad$ $ax + b \leq 0$ $\quad$ $ax + b > 0$ $\quad$ $ax + b \geq 0$

Las desigualdades se resuelven del mismo modo que las ecuaciones, y solo cambia el sentido de la desigualdad en el caso que se multiplique o divida ambos miembros por un número negativo.

Ejemplo.

$$-3x + 2 < 50$$

$$-3x < 48$$

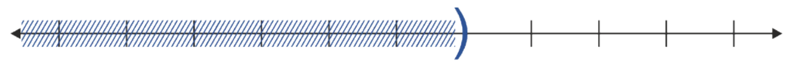
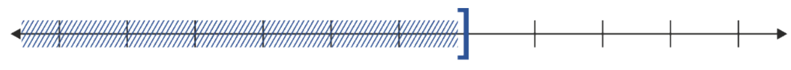
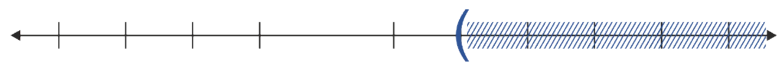
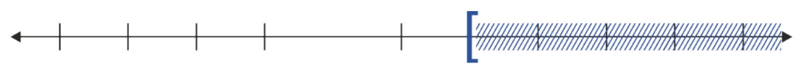
$$x > \frac{48}{-3}$$

$$x > -16$$

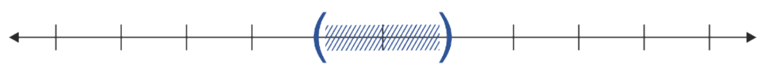
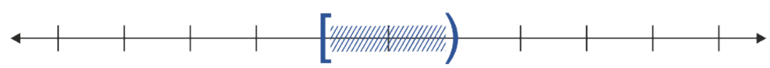
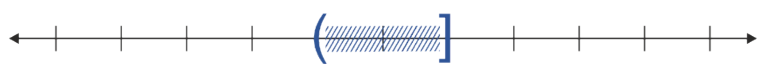
Se invierte la desigualdad

Resolución gráfica

Las soluciones de las inecuaciones pueden ser de la forma:

Solución de la inecuación	Solución en notación de intervalo	Representación gráfica de la solución
$x < a$	$(-\infty,a)$	
$x \leq a$	$(-\infty,a]$	
$x > a$	(a,∞)	
$x \geq a$	$[a,\infty)$	

Sistema de inecuaciones lineales

Solución del sistema de inecuaciones	Solución en notación de intervalo	Representación gráfica de la solución
$a < x < b$	(a,b)	
$a \leq x < b$	$[a,b)$	
$a < x \leq b$	$(a,b]$	
$a \leq x \leq b$	$[a.b]$	

Ejemplos.

1. $-5x + 2 \geq 2(x + \frac{1}{2})$

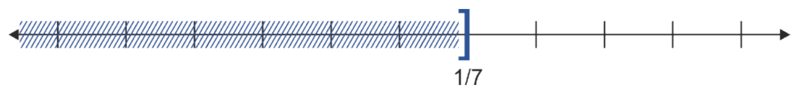
   $-5x + 2 \geq 2x + 1$

   $2 - 1 \geq 2x + 5x$

   $1 \geq 7x$

$$\frac{1}{7} \geq x$$

$$S: \left(-\infty; \frac{1}{7}\right)$$



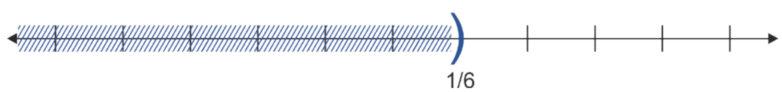
2. $3(x-1)+4 < -3x+2$

$$3x-3+4 < -3x+2$$

$$3x+3x < 2-1$$

$$6x < 1$$

$$x < \frac{1}{6}$$



$$S: \left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$$

3. $2x+1 < 2(4+x)$

$$2x+1 < 8+2x$$

$$1 < 8$$

$$S: R$$

4. $-3x-5 \geq \frac{1}{2}(7-6x)$

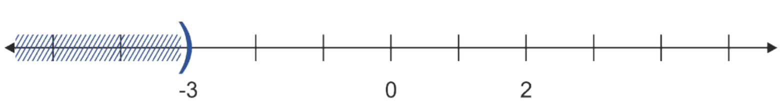
$$-3x-5 \geq \frac{7}{2} - 3x$$

$$-5 \geq \frac{7}{2}$$

$$S: \emptyset$$

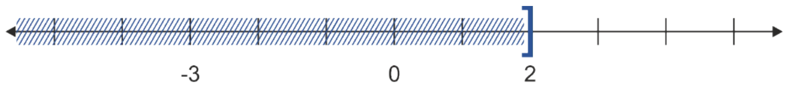
La desigualdad no se cumple nunca.

5. $\begin{cases} x+3 < 0 \\ 5-2x \geq 1 \end{cases}$

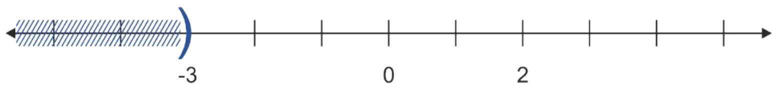


$x + 3 < 0 \rightarrow x < -3 \quad S_1{:}(-\infty; -3)$

$5 - 2x \geq 1 \rightarrow x \leq 2 \quad S_2{:}(-\infty;2]$

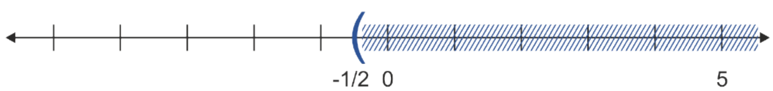


$S{:}S_1 \cap S_2{:}(-\infty, -3)$



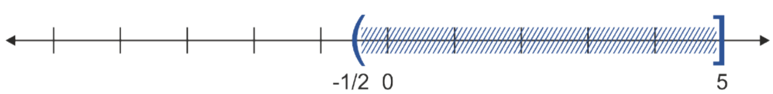
6. $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

$2x + 1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \quad S_1{:}\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$



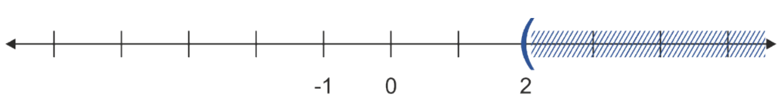
$5 - x \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \quad S_2{:}(-\infty;5]$

$S{:}S_1 \cap S_2{:}\left(-\frac{1}{2},5\right)$

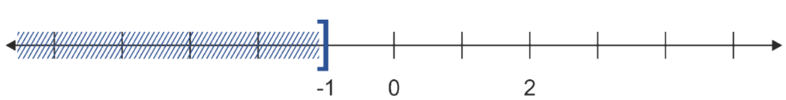


7. $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$

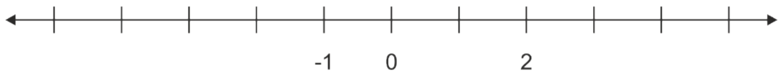
$3x - 6 > 0 \rightarrow x < 2 \quad S_1{:}(2;\infty)$



$x + 1 \leq 0 \rightarrow x \leq -1 \quad S_2{:}(-\infty;-1]$



$S{:}S_1 \cap S_2{:}\emptyset$



8. $-\frac{7}{x} > 5$

Este tipo de ejercicio se puede resolver aplicando dos métodos:

- Por sistema de ecuaciones

$$-\frac{7}{x} > 5$$

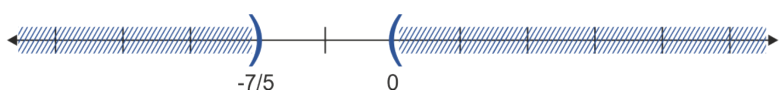
$$-\frac{7}{x} - 5 > 0$$

$$\frac{-7-5x}{x} > 0$$

El signo de este cociente depende del signo de los factores, y es por ello que se deberán plantear dos sistemas de ecuaciones

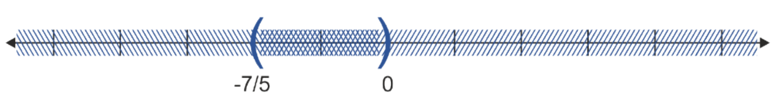
1) $\begin{cases} -7-5x > 0 \rightarrow x < -\frac{7}{5} \\ x > 0 \qquad\quad \rightarrow \ x > 0 \end{cases}$

$S{:}\emptyset$



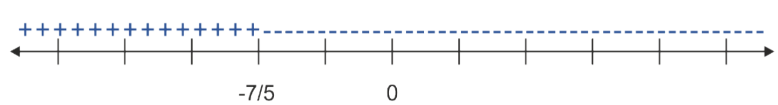
2) $\begin{cases} -7-5x < 0 \rightarrow x > -\frac{7}{5} \\ x < 0 \qquad\quad \rightarrow \ x < 0 \end{cases}$

$S{:}S_1 \cap S_2{:}\left(-\frac{7}{5},0\right)$



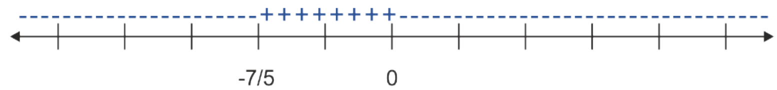
- Por regla de los signos

Signo $(-7x-5x)$



Signo (x)

Signo $(-7x-5x).(x)$

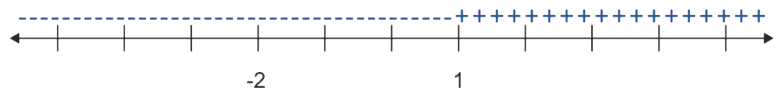


S: $\left(-\frac{7}{5},0\right)$

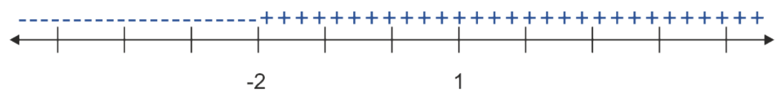
9. $(x-1)(x+2) \leq 0$

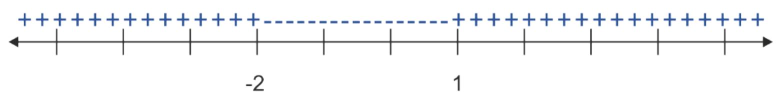
El signo del producto depende del signo de los factores

Signo $(x-1)$



Signo $(x+2)$





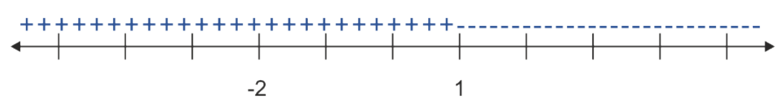
Signo $(x-1).(x+2)$

S:$[-2;1]$

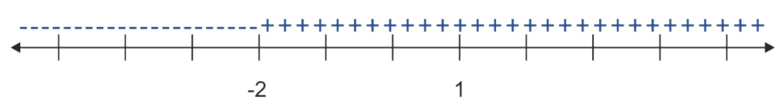
10. $\dfrac{x+2}{1-x} \leq 0$

El signo del cociente depende del signo de los factores. Los números -2 y 1 son los puntos donde los factores cambian de signo, sin embargo, hay que tener en cuenta que $x \neq 1$ porque este valor anula el denominador.

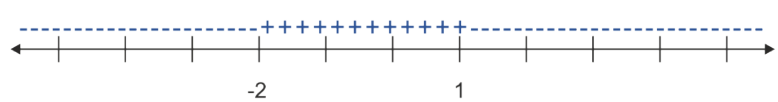
Signo $(x+2)$



Signo $(1-x)$



Signo $\frac{x+2}{1-x}$



S:$(-\infty;-2] \cup (1;\infty)$

Magnitudes y unidades

Las magnitudes son una propiedad de los fenómenos, cuerpos o sustancias, susceptibles de ser cuantificados.

No podemos referirnos a un fenómeno (físico) sin hacer referencia a la intensidad con la cual se llevó a cabo, o sea, el valor numérico que se le asigna y, su unidad, que es la herramienta lingüística que nos permite diferenciar un fenómeno de otro.

Cada magnitud se ha adoptado por conveniencia ni bien fueron descubriéndose e individualizando hechos complejos de la naturaleza. Son ejemplos de magnitud en sentido general la masa, la carga eléctrica, la temperatura, entre tantas otras que constituyen el lenguaje de la ciencia, para explicar, cualitativa y cuantitativamente los fenómenos del universo.

Las magnitudes se clasifican en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas.

Una magnitud fundamental es aquella que se define por sí misma y es independiente de las demás (masa, tiempo, longitud, etc.) y una magnitud derivada es aquella que se obtiene mediante expresiones matemáticas a partir de las magnitudes fundamentales (densidad, superficie, velocidad).

Magnitudes fundamentales	Unidades (SI)	Símbolos
Longitud (l)	metro	m
Masa (m)	kilogramo	kg
Tiempo (t)	segundo	s
Temperatura (T)	Kelvin	K
Intensidad de corriente (I)	amperio	a
Intensidad luminosa (I)	candela	cd
Cantidad de sustancia (n)	mol	mol

Magnitudes derivadas	Unidades
Volumen (V)	m^3
Densidad ($\boldsymbol{\rho}$)	kg/m^3
Velocidad (v)	m/s
Aceleración (a)	m/s^2
Fuerza (F)	$kg.m/s^2 \ = N$
Presión (p)	$N/m^{\ 2} = Pa$
Trabajo (W)	$N.m = J$

Las cantidades físicas

Un patrón físico es un patrón de medida acordado por la comunidad científica internacional, de manera que, por ejemplo, sistemas de medida de distintos países concuerden a través de valores equivalentes. Es quiere decir que una longitud definida igual a 1 metro (1 [m]) tanto en Argentina como en Francia o en China, o en cualquier país del mundo, independientemente del sistema de medida que aplique sea el misma. En la actualidad varios países se rigen con el Sistema Internacional de Unidades (SI), hecho que facilita la comunicación espontánea sobre problemáticas científico-tecnológicas, como así también, el intercambio de tecnología.

El patrón de masa

A finales del siglo XIX, la Convención del Metro, establece el kilogramo (kg) como la unidad de base de masa en el Sistema Internacional (SI). El kilogramo fue definido como la masa de un artefacto sólido o pesa, de forma cilíndrica, de 39 mm de altura y 39 mm de diámetro, fabricado con una aleación de 90% de platino y 10% de iridio. Se eligieron estas dimensiones para lograr que la masa de 1 dm^3 de agua sea aproximadamente de 1 kg. Esta pesa, construida 1879, hoy es denominada IPK (siglas en inglés de Prototipo Internacional del Kilogramo) y se custodia en las instalaciones del BIPM en Sèvres, cerca de París.

Con el paso del tiempo se ha encontrado que el peso patrón ha perdido masa, aproximadamente 50 ug en un siglo. Se están realizando experimentos para definir el kilogramo mediante leyes físicas. Una consiste en fijar el valor del número de Avogadro, para luego materializar la unidad de masa con una esfera de silicio casi perfecta. Conociendo con exactitud las características dimensionales, se determina el volumen de la esfera y cada uno de sus átomos, a partir de estos datos con el número de Avogadro se puede conocer la masa exacta. El otro experimento que está bastante avanzado probablemente sea el nuevo patrón, es a partir de la constante de Planck, y luego mediante mediciones eléctricas se materializa el kilogramo utilizando un dispositivo denominado balanza de Watt.

En la Argentina, el patrón nacional de masa es una pesa de acero inoxidable austenítico de un kilogramo, identificada como K30.

Unidades de masa

Múltiplos	**Unidad**	**Símbolo**	**Equivale a**
	Tonelada métrica	t	$1000\ kg$
	Quintal	q	$100\ kg$
	Kilogramo	kg	$1000\ g$
	Hectogramo	hg	$100\ g$
	Decagramo	dag	$10\ g$
Unidad principal	Gramo	g	$1\ g$
Submúltiplos	Decigramo	dg	$0{,}1\ g$
	Centigramo	cg	$0{,}01\ g$
	Miligramo	mg	$0{,}001\ g$

El patrón de longitud

El primer patrón de longitud fue una barra de una aleación de platino e iridio que se llamó el metro patrón, el cual fue guardado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas cerca de París. Históricamente, el metro se tomó como una diezmillonésima parte de la distancia entre el polo norte y el ecuador a lo largo de la línea de meridiano que pasa por París. Sin embargo, las mediciones más precisas demostraron que la barra del metro patrón difiere ligeramente (alrededor del 0,023 %) del valor deseado. Un patrón de longitud más preciso y reproducible fue obtenido cuando el físico estadounidense Albert

Michelson comparó en 1893 la longitud del metro patrón con la longitud de onda de la luz roja emitida por los átomos de cadmio. Michelson midió cuidadosamente la longitud de la barra metro y encontró que el metro patrón era igual a 1.553.163,5 de aquellas longitudes de onda.

Unidades de longitud

Múltiplos	Unidad	Símbolo	Equivale a
	Kilómetro	km	$1000\ m$
	Hectómetro	hm	$100\ m$
	Decámetro	dam	$10\ m$
Unidad principal	Metro	m	$1\ m$
Submúltiplos	Decímetro	dm	$0{,}1\ m$
	Centímetro	cm	$0{,}01\ m$
	Milímetro	mm	$0{,}001\ m$

El patrón de tiempo

Cualquier fenómeno que se repita a sí mismo puede utilizarse como una medición de tiempo. De los muchos fenómenos repetitivos en la naturaleza, la rotación de la Tierra sobre su eje, que determina la duración del día, fue usada durante siglos como un patrón de tiempo. Para cumplir la necesidad de un patrón de tiempo mejor, se han desarrollado relojes atómicos; como ser, el segundo basado en el reloj de cesio fue adoptado como un patrón internacional en 1967, donde se dio la siguiente definición “El segundo es el tiempo ocupado por 9.192.631.770 vibraciones de la radiación (de una longitud de onda específica) emitida por un átomo de cesio”.

Sistemas de unidades

Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

La Conferencia General de Pesas y Medidas, en las reuniones sostenidas en el período 1954-1971, seleccionó como unidades fundamentales básicas las siete cantidades mostradas en la siguiente tabla que, son la base del Sistema Internacional de Unidades.

Unidades básicas del SI

Magnitud	Nombre	Símbolo
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Cantidad de sustancia	mol	mol
Temperatura	Kelvin	K
Corriente eléctrica	Amper	A
Intensidad lumínica	candela	cd

Sistema cegesimal

El sistema cegesimal de unidades, también llamado sistema CGS, es un sistema de unidades basado en el centímetro, el gramo y el segundo. Su nombre es el acrónimo de estas tres unidades. El sistema CGS ha sido casi totalmente reemplazado por el Sistema

Internacional de Unidades. Sin embargo se utiliza en algunos campos científicos y técnicos muy concretos.

Sistema Inglés

El sistema inglés de unidades o sistema imperial es aún usado ampliamente en los Estados Unidos y, cada vez en menor medida, en algunos países con tradición británica. En este sistema las unidades fundamentales son:

Unidades básicas del SI

Magnitud	Unidad	Equivalencia con SI
Longitud	Pulgada	$\mathbf{1\ in = 2{,}54\ cm}$
	Pie	$\mathbf{1\ pie = 30{,}48\ cm}$
	Yarda	$\mathbf{1\ yd = 0{,}914\ m}$
	Milla	$\mathbf{1\ mi = 1{,}609\ km}$
Masa	Onza	$\mathbf{1\ oz = 28{,}35\ g}$
	Tonelada	$\mathbf{1\ t = 907{,}2\ kg}$
Volumen	Galón	$\mathbf{1\ gal = 3{,}785\ l}$
	Cuarto	$\mathbf{1\ qt = 946{,}4\ ml}$
	Pie cúbico	$\mathbf{1\ pie^3 = 28{,}32\ l}$

Unidades derivadas del Sistema Internacional de Unidades (SI)

Superficie

Unidades de superficie

Múltiplos	Unidad	Símbolo	Equivale a
	Kilómetro cuadrado	km^2	$1000000\ m^2$
	Hectómetro cuadrado	hm^2	$10000\ m^2$
	Decámetro cuadrado	dam^2	$100\ m^2$
Unidad principal	Metro cuadrado	m^2	$1\ m^2$
Submúltiplos	Decímetro cuadrado	dm^2	$0{,}01\ m^2$
	Centímetro cuadrado	cm^2	$0{,}0001\ m^2$
	Milímetro cuadrado	mm^2	$0{,}000001\ m^2$

Volumen

Unidades de superficie

Múltiplos	Unidad	Símbolo	Equivale a
	Kilómetro cúbico	km^3	$1000000000\ m^3$
	Hectómetro cúbico	hm^3	$1000000\ m^3$
	Decámetro cúbico	dam^3	$1000\ m^3$
Unidad principal	Metro cúbico	m^3	$1\ m^3$
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm^3	$0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$0{,}000000001\ m^3$

Velocidad

Es la distancia recorrida [m] dividido el tiempo total de recorrido [s]

$$v = \frac{distancia}{tiempo}$$

Ejemplos. ${}^{km}/_{h}, {}^{m}/_{min}, {}^{km}/_{s}, {}^{m}/_{s}$

Fuerza

De acuerdo con la segunda ley de Newton sobre el movimiento,

$$Fuerza = masa.aceleracion$$

La unidad derivada del SI es el N (Newton)

$N = kg.m/s^2$

Presión

La presión se define como fuerza por unidad de área, esto es:

$$Presión = \frac{Fuerza}{Área}$$

Las unidades de presión más utilizadas son:

$Pascal\ [Pa] = N/m^2$ (en SI)

$PSI = lbf/in^2$ (en Sistema Inglés)

$Atmósfera = atm.$ Definida como la presión atmosférica ejercida por una columna de aire seco al nivel del mar a 0°C

$Bar = 1000000\ Pa$

$mmHg\ (o\ Torr) =$ Milímetros de una columna de mercurio.

Conversiones

$1\ atm = 101325\ Pa = 1{,}01325\ bar$

$1\ atm = 14{,}696\ psi$

$1 dina/cm^2 = 0{,}1\ Pa$

$1\ atm = 760\ mmHg$

$1\ mmHg = 133{,}2894\ Pa$

Escalas de temperatura

En la escala Celsius se divide en 100 grados el intervalo comprendido entre el punto de congelación (0 °C) y el de ebullición (100 °C) del agua. La escala Celsius es generalmente la más usada en el ámbito científico.

En la escala Fahrenheit se definen los puntos de fusión y ebullición normales del agua exactamente en 32 °F y 212 °F, en ese orden, habiendo 180 grados entre ambos.

Para convertir grados Fahrenheit a grados Celsius, se tiene:

$$y°C = (x\,°F - 32°F).\frac{5°C}{9°F}$$

donde x e y son las variables.

Para convertir grados Celsius a grados Fahrenheit, se tiene:

$$y°F = \frac{9°F}{5°C}.x°C + 32°F$$

Conversión de unidades

A veces las cantidades físicas vienen dadas, en artefactos electrodomésticos, máquinas herramientas, manuales, problemas propuestos, y hasta en nuestras propias observaciones, en determinadas unidades.

A veces será necesario convertir una cantidad expresada en una unidad a una cantidad equivalente expresada en otra. Por ejemplo, si se quiere convertir la distancia de 23 millas mi a metros m. Comenzaremos por decir que $1\,mi = 1609\,m$, entonces la relación entre ambas cantidades es igual a 1.

Esta relación se conoce como operador unitario, ya que se puede multiplicar una cantidad por 1, pues no cambia su valor, es posible multiplicar la distancia original de 100 mi por 1 en la siguiente forma:

$$100\,mi.\frac{1609\,km}{1\,mi} = \frac{160{,}9\,mi.km}{1mi} = 160{,}9\,km$$

Ejemplo. Si se deseara expresar $90\,km/h$ en m/s se procede de la siguiente manera:

Las conversiones de unidades necesarias son:

$1\,km = 1000\,m$

$1\,h = 3600\,s$

Los factores de conversión serán:

$$\frac{1000\,m}{1\,km} = 1$$

$$\frac{1\,h}{3600\,s} = 1$$

Por lo tanto, el cambio de unidades se realiza como sigue:

$$90\frac{km}{h}=90\frac{km}{h}.\frac{1000\,m}{1\,km}.\frac{1\,h}{3600\,s}=25\frac{m}{s}$$

El cambio de unidades inverso se realiza con los factores de conversión inversos:

$$25\frac{m}{s}=25\frac{m}{s}.\frac{1\,km}{1000\,m}.\frac{3600\,s}{1\,h}=90\frac{km}{h}$$

Consistencia de unidades

Cualquier ecuación relacionada con cantidades físicas debe tener las mismas unidades en ambos lados. Por ejemplo en la ecuación $v=d/t$, si d es un desplazamiento en $[m]$ y t es el tiempo en $[s]$, la velocidad v deberá tener unidades de $[m/s]$. También es posible multiplicar cantidades que tengan diferentes unidades, como $F=m.a$ en donde la masa m se mide en $[kg]$ y la aceleración a en $[m/s^2]$ que da por resultado la fuerza F en $[kg.m/s^2]$ que como vimos es lo mismo que $[N]$.

En el caso que dos cantidades se sumen o resten, deberán necesariamente tener las mismas unidades. La consistencia de las unidades proporciona un camino útil para verificar el trabajo algebraico u otros cálculos: los errores algebraicos (una cantidad “mal despejada”) casi siempre producen unidades inconsistentes. Es importante entonces usar siempre las unidades en que están medidas las cantidades físicas a la hora de reemplazar las mismas en las ecuaciones

Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes son propiedades físicas que pueden ser medidas, como por ejemplo temperatura, longitud, fuerza, corriente eléctrica, etc. Encontramos dos tipos de magnitudes, las escalares y las vectoriales.

Magnitudes escalares

> Las magnitudes escalares tienen únicamente como variable a un número que representa una determinada cantidad.

La masa de un cuerpo, que en el Sistema Internacional de Unidades se mide en kilogramos, el volumen, que se mide en metros cúbicos, la temperatura o la longitud, son algunos ejemplos de magnitudes escalares.

Magnitudes vectoriales

En muchos casos las magnitudes escalares no nos dan información completa sobre una propiedad física. Por ejemplo, una fuerza de determinado valor puede estar aplicada sobre un cuerpo en diferentes sentidos y direcciones.

> Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores, es decir, además de un módulo (o valor absoluto) tienen una dirección y un sentido.

Ejemplos de magnitudes vectoriales son la velocidad, la fuerza, la aceleración y el campo eléctrico. Según el modelo físico con el que estemos trabajando, se utilizan vectores con diferente número de componentes. Los más utilizados son los de dos y tres coordenadas que permiten representar valores en el plano y en el espacio respectivamente.

EJE 2: GEOMETRÍA EN EL PLANO Y ESTÁTICA

Sistemas de medición de ángulos

Sistema sexagesimal

La unidad es el grado sexagesimal, que es la 180ava parte de un ángulo llano giro. Los submúltiplos son los minutos y segundos, que a su vez son la 60ava parte de su unidad anterior.

Medidas de ángulos

Medidas de ángulos			Equivalencias
Unidad	Grado	$1° = \frac{1\ llano}{180}$	$1° = 60' = 3600''$
	Minutos	$1' = \frac{1°}{60}$	$1' = \left(\frac{1}{60}\right)° = 60''$
Submúltiplo	Segundos	$1'' = \frac{1'}{60}$	$1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)° = \left(\frac{1}{60}\right)'$

Ejemplos. Conversión de un ángulo en grados, minutos y segundos a grados y viceversa.

1. Expresar el ángulo $\alpha = 30°\ 20'\ 40''$en grados

$$\alpha = 30°\ 20'\ 40'' = 30° + \left(\frac{20}{60}\right)° + \left(\frac{40}{3600}\right)° = 30{,}34°$$

2. Expresar el ángulo $\theta = 18{,}29°$ en grados, minutos y segundos

Separamos la parte entera de la decimal de $18{,}29°$

$$18{,}29° = 18° + 0{,}29°$$

Usando proporcionalidad directa calculamos cuántos minutos son $0{,}29°$

$1°$ ______ $60'$

$0{,}29°$ ____ $x = 17{,}4'$

Separamos la parte entera de la decimal de $17{,}4'$.

$$17{,}4' = 17' + 0{,}4'$$

Usando proporcionalidad directa calculamos cuántos segundos son $0{,}4'$

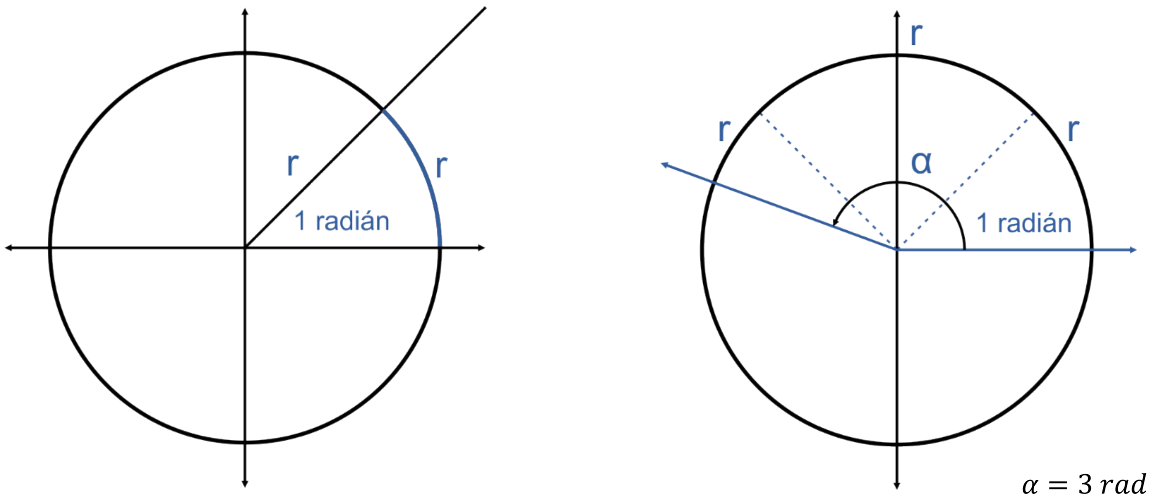
$1' \underline{\hspace{2cm}} 60''$

$0{,}4' \underline{\hspace{1cm}} x = 24''$

Así obtenemos: $18{,}29° = 18°\,17'24''$

Sistema circular o radial

La unidad de medida es el radián. Se define al ángulo de radian como el ángulo que determina un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.



$\alpha = 3\,rad$

Relación entre arco, radio y ángulo.

En una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de α radianes es $S = r\alpha$

Relaciones de equivalencias entre los dos sistemas

De la definición de radián y de grado se desprende que:

$$1\ giro = 2\pi\ radián = 360°$$

$$1\ llano = \pi\ radián = 180°$$

$$1\ recto = \frac{\pi}{2} radián = 90°$$

Equivalencias

$1° = 0{,}0175\ rad$

$57{,}296° = 1\ rad$

Conversión de los ángulos más comunes

Grados	Radianes
$0°$	0
$30°$	$\pi/6$
$45°$	$\pi/4$
$60°$	$\pi/3$
$90°$	$\pi/2$
$120°$	$2\pi/3$
$135°$	$3\pi/4$
$150°$	$5\pi/6$
$180°$	π
$210°$	$7\pi/6$
$225°$	$5\pi/4$
$240°$	$4\pi/3$
$270°$	$3\pi/2$
$300°$	$5\pi/3$
$315°$	$7\pi/4$
$330°$	$11\pi/6$
$360°$	2π

Ejemplos.

1. Expresar el ángulo $\alpha = 70°\ 10'\ 40''$ en el sistema circular.

$$\alpha = 70°\ 10'\ 40'' = 70° + \left(\frac{10}{60}\right)° + \left(\frac{40}{3600}\right)° = 70{,}178°$$

Su equivalencia en el sistema circular:

$360°\_\_\_\_\_2\pi\ rad$

$70{,}178°\_\_\_\_\_x = 1{,}22\ rad$

2. Expresar el ángulo $\beta = 2\ rad$ en el sistema sexagesimal.

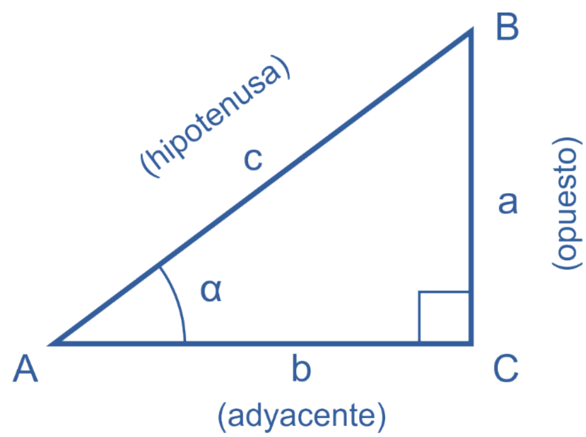
$2\pi\ rad\_\_\_\_\_360°$

$2\ rad\_\_\_\_\_\_\_x = 114{,}59° = 114°\ 35'\ 30''$

Aplicación de la trigonometría en triángulos rectángulos

Para resolver triángulos en general, se utilizan los teoremas del seno y del coseno. Para el caso especial de triángulos rectángulos se utiliza el Teorema de Pitágoras.

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos



En triángulos rectángulos, las razones trigonométricas del seno, coseno y la tangente pueden ser usadas para encontrar los ángulos y las longitudes de lados desconocidos. El cateto opuesto es el lado opuesto al ángulo agudo considerado.

$$sen\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tan\alpha = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{a}{b}$$

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

SI un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b y la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

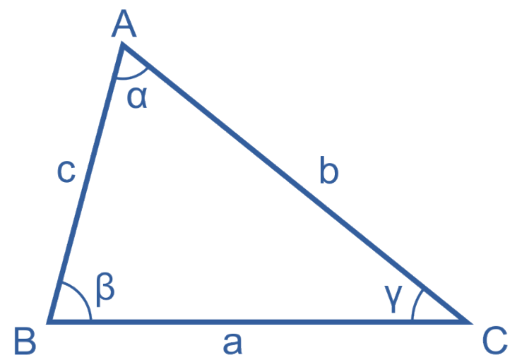
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

De la ecuación (1) se deducen fácilmente 3 corolarios de aplicación práctica:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema del seno

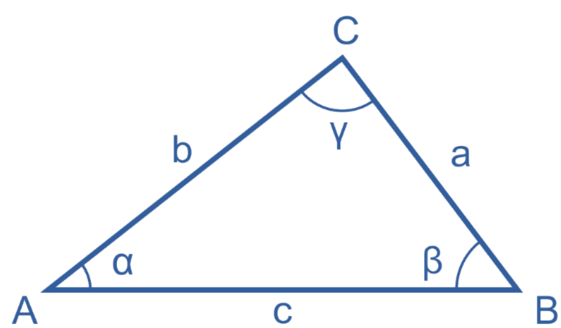
Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos α,β,γ son respectivamente a,b,c entonces:



$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Teorema del coseno

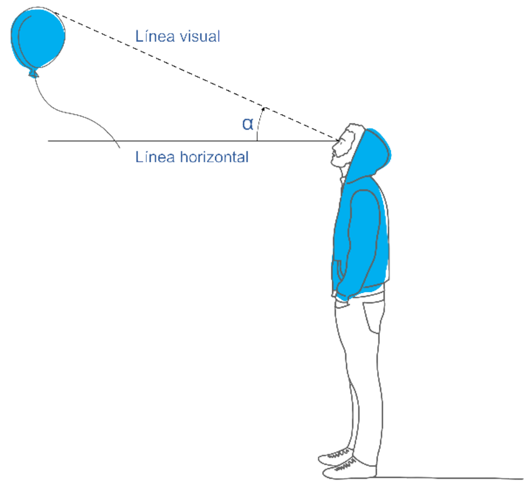
Dado un triángulo ABC, siendo α,β,γ los ángulos y a,b,c los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:



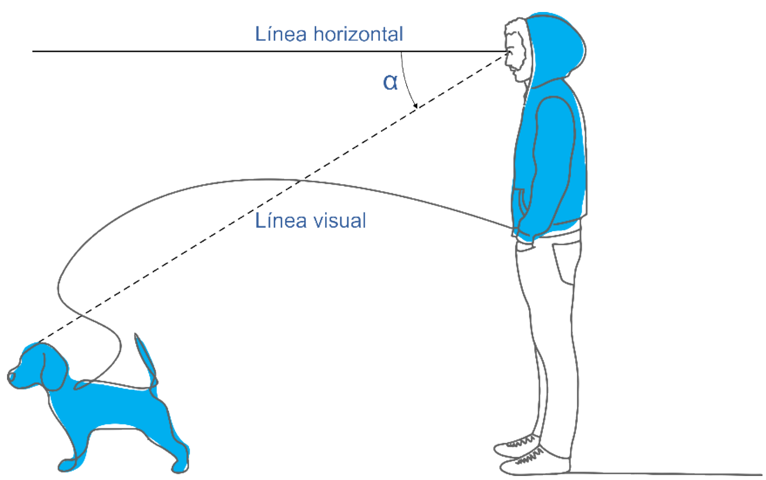
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

Ángulo de elevación y ángulo de depresión

Ángulo de elevación. Es el ángulo α que forma la línea visual, que “sale” del ojo de un observador, que mira hacia arriba, y la línea horizontal correspondiente.

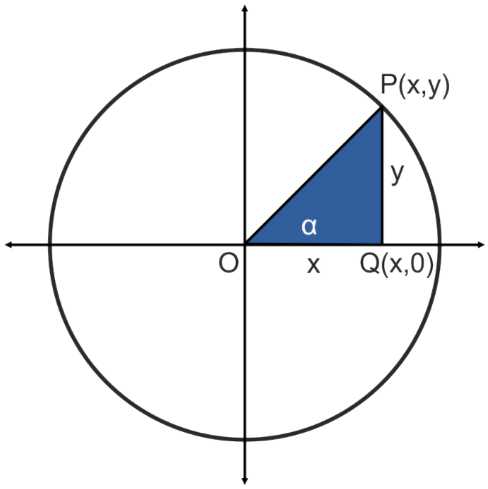


Ángulo de depresión. Es el ángulo β que forma la línea visual, que "sale" del ojo de un observador, que mira hacia abajo, y la línea horizontal.



Circunferencia trigonométrica

La circunferencia trigonométrica es una circunferencia de radio uno, centrada en el origen de coordenadas. Permite analizar que sucede con los valores de las razones trigonométricas cuando el valor del ángulo está comprendido entre $0°$ y $360°$ $(2\pi\ rad)$.



Sea $P(x,y)$ un punto sobre la circunferencia determinado por la intersección del lado móvil del ángulo con la circunferencia. La proyección del punto P sobre el eje x determina el punto Q. El triángulo POQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitudes x e y. Por la definición se tiene que:

$$sen\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipoteniusa} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} \quad \rightarrow y = sen\theta$$

$$cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipoteniusa} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} \quad \rightarrow x = cos\theta$$

$$tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \frac{y}{x} = tan\theta, con\ x \neq 0$$

Relaciones trigonométricas

A partir de los resultados anteriores y aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo POQ se tiene que:

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2$$

Lo que es lo mismo que

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Esta relación recibe el nombre de **relación pitagórica**.

Además, como $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = tan\alpha$ se tiene que $\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tan\alpha$

A partir de la ecuación (1) podemos deducir otras relaciones:

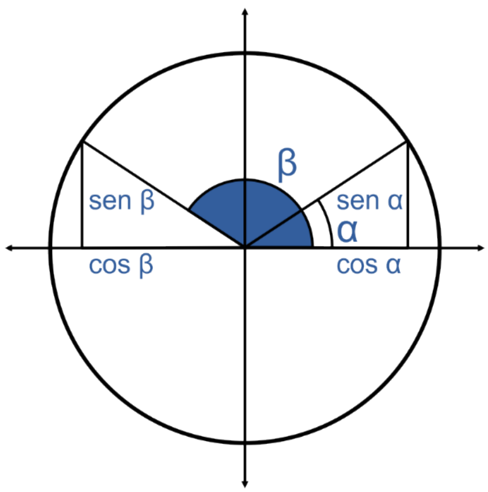
$$sen\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

$$cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Relaciones entre los ángulos de distintos cuadrantes

Relación entre ángulos del primer y del segundo cuadrante

Sea α un ángulo del primer cuadrante entonces existe β en el segundo cuadrante llamado suplementario a α tal que $\beta = 180° - \alpha$.

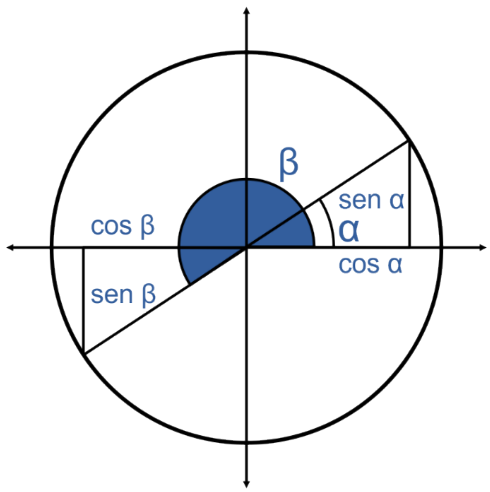


Por lo tanto se tendrá que:

$$sen\beta = sen\alpha \qquad cos\beta = -cos\alpha \qquad tan\beta = -tan\alpha$$

Relación entre ángulos del primer y del tercer cuadrante

Sea α un ángulo del primer cuadrante entonces existe β en el tercer cuadrante tal que $\beta = 180° + \alpha$.

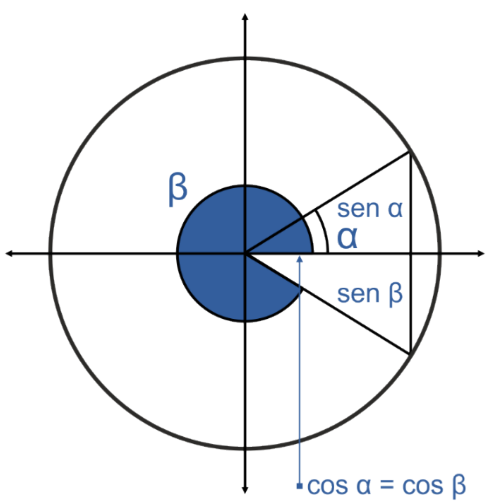


Por lo tanto se tendrá que:

$$sen\beta = -sen\alpha \qquad cos\beta = -cos\alpha \qquad tan\beta = tan\alpha$$

Relación entre ángulos del primer y del cuarto cuadrante

Sea α un ángulo del primer cuadrante entonces existe β en el cuarto cuadrante tal que $\beta = 360° - \alpha$.



Por lo tanto se tendrá que:

$$sen\beta = -sen\alpha \qquad cos\beta = cos\alpha \qquad tan\beta = -tan\alpha$$

EJE 3: FUNCIONES

Se dice que y es función de x cuando a cada valor de x le corresponde un valor de y. La expresión $y = f(x)$ se lee "y es función de x". La variable x se llama **variable independiente**, la variable y se llama **variable dependiente.**

Formas de expresar una función

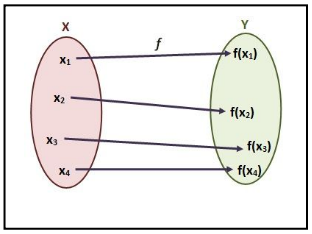


Diagrama de Venn

$$f(x) = 2x$$

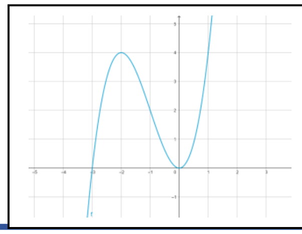
Función analítica

$$f = \{(x;y)\ /y = 2x\}$$

Notación de conjuntos

x	y
1	2
2	4
3	6

Forma tabular



Representación gráfica

Sea f:$A \to B/\ y = f(x)$

La función f relaciona los elementos del conjunto A (conjunto de partida) con los elementos del conjunto B (conjunto de llegada).

Dominio. Es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente x y se simboliza D_f.

Codominio. Es el conjunto que contiene a todos los valores de y que puede tomar una función.

Imagen. Cada elemento y perteneciente al conjunto de llegada que está asociado a un elemento x del dominio de f se llama imagen y se simboliza $f(x)$.

Características de las funciones

Funciones pares e impares

Una función es par cuando $f(x) = f(-x)$ resulta un gráfico simétrico respecto del eje y. Una función es impar cuando $f(x) = -f(x)$.

Ejemplos.

$f(x) = |x|$ es par

La gráfica de la función es simétrica respecto del eje y.

$f(x) = x$ es impar

La gráfica de la función es simétrica respecto del origen.

Crecimiento y decrecimiento

Una función es creciente cuando $f(a) \leq f(b)$. Una función es decreciente cuando $f(a) \geq f(b)$, siempre que $a < b$.

Ejemplo.

$f(x) = x^2$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función $f(x)$ es decreciente, mientras que en el intervalo $(0, \infty)$ $f(x)$ es creciente.

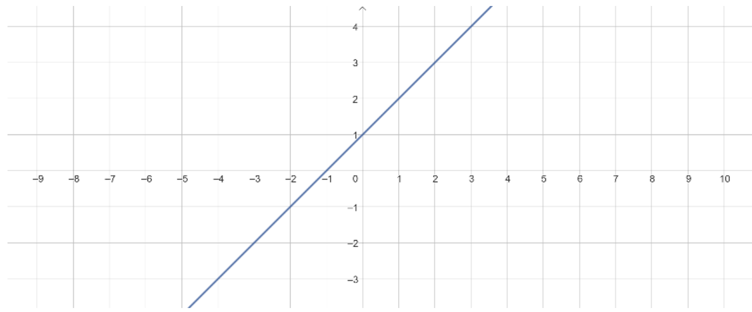
Una función es **estrictamente creciente** cuando $f(a) < f(b)$, siempre que $a < b$. Una función es **estrictamente decreciente** cuando $f(a) > f(b)$, siempre que $a < b$.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Funciones inyectivas. Una función es inyectiva si para cada valor de x existe un valor diferente de y.

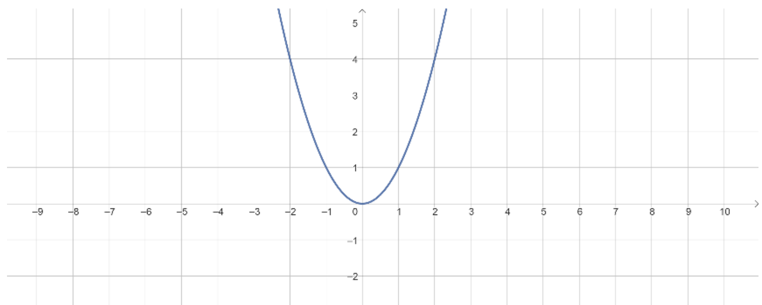
Ejemplos.

$f(x) = x + 1$



Esta función es **inyectiva**. A cada valor de x le corresponde un valor distinto de y**.**

$f(x) = x^2$

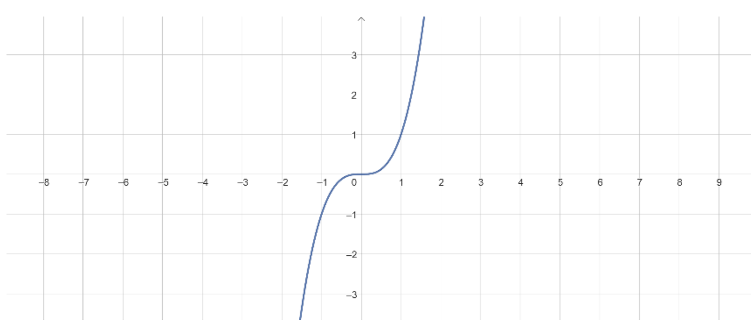


Esta función es **no es inyectiva**, porque es par. Hay valores de y que se repiten para diferentes valores de x.

> **Funciones sobreyectivas.** Una función es sobreyectiva si todo elemento del Codominio de la función es imagen de al menos de un elemento del dominio.

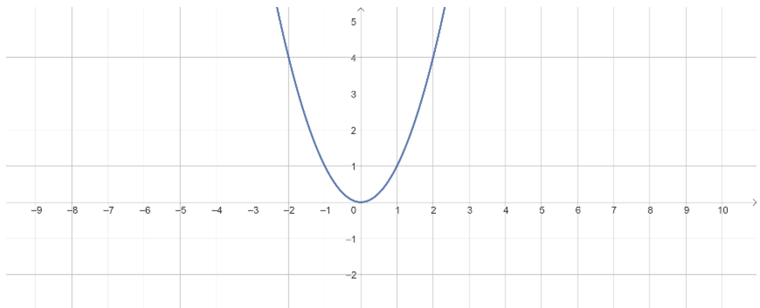
Ejemplos.

$f(x) = x^3$



Esta función es **sobreyectiva**. Todos los elementos del codominio son imagen de al menos de un elemento del dominio.

$f(x) = x^2$

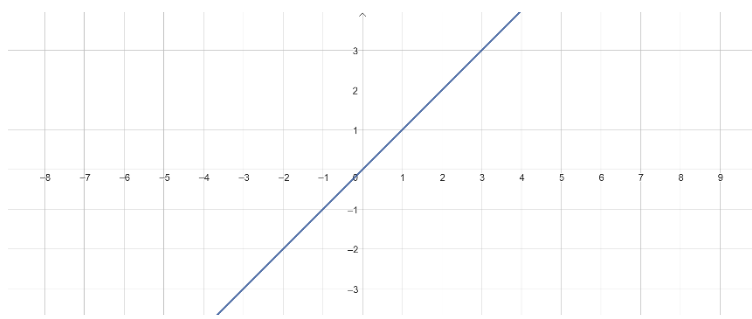


Esta función es **no es sobreyectiva**.

Funciones biyectivas. Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo.

$f(x) = x$



Clasificación de funciones

Funciones polinómicas

Una función polinómica tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad con\ a \in R\ y\ a_n \neq 0$$

1. Si $n = 1$, $f(x) = x$
2. Si $n = 2$, $f(x) = x^2$
3. Si $n = 1$, $f(x) = x^3$

Función lineal

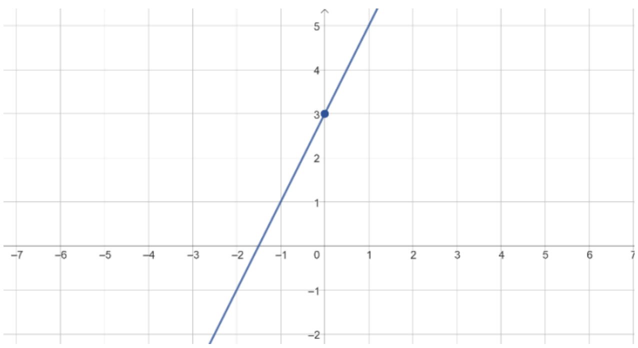
La función lineal es de la forma

$$f(x) = ax + b$$

donde $a \wedge b \in R$ y $a \neq 0$.

El dominio de la función lineal es el conjunto R. La gráfica es una recta.

El parámetro a es la **pendiente** de dicha recta y su valor indica la inclinación con respecto al eje x. El parámetro b es la ordenada al origen, y señala el valor en que la recta corta al eje y.



Función: $f(x) = 2x + 3$

Parámetro $a = 2$

Parámetro $b = 3$

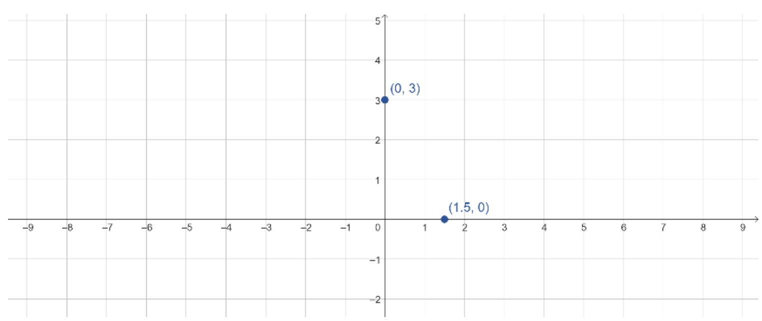
Para representar una función lineal es suficiente conocer dos puntos que pertenezca a su gráfica.

Ejemplo.

Para representar la función $f(x) = 2x + 3$ elegimos dos elementos del dominio y buscamos la imagen.

$$x = 0 \; es \; f(0) = -2.0 + 3 = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \; es \; f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\frac{2}{3} + 3 = 0$$

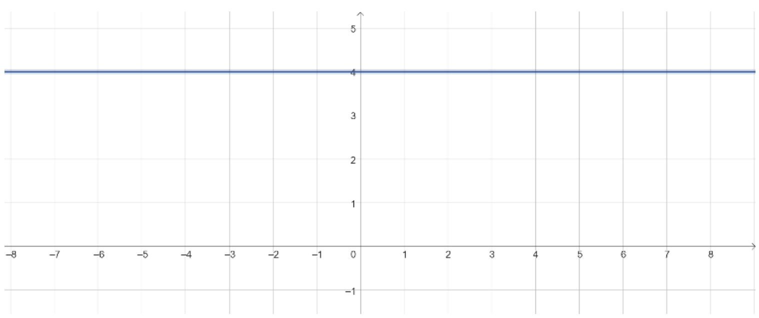


Entonces, los puntos $(0;3)$ y $(\frac{3}{2};0)$ pertenecen al gráfico de la función. Los dos puntos determinan la recta de ecuación $y = -2x + 3$ que es la gráfica de la función f.

Otras expresiones de la función lineal

- Funciones lineales de la forma $f(x) = b$

Surge de hacer $a = 0$ en la expresión $f(x) = ax + b$. Por ejemplo: $f(x) = 4$. La gráfica de esta función es una recta paralela al eje de abscisas.

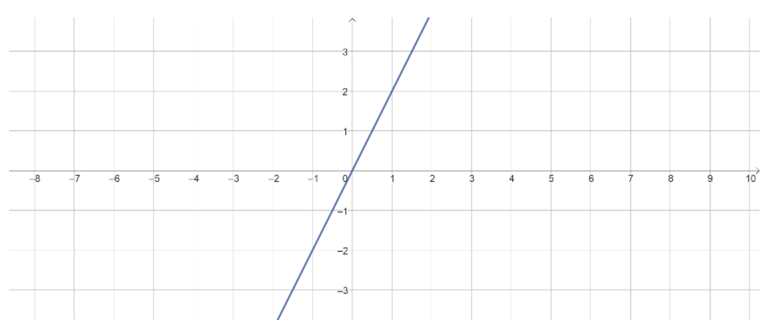


Todos los puntos de la recta tienen la forma $(x;3)$. Estas rectas representan **funciones constantes.**

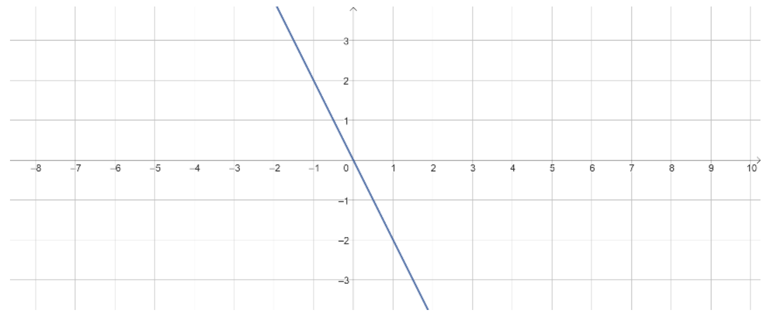
- Funciones lineales de la forma $f(x) = ax; (a \neq 0)$

Sus gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas. El punto $(0;0)$ pertenece a cualquiera de ellas.

Por ejemplo, si hacemos $a = 2$, resulta $f(x) = 2x$



Si hacemos $a = -2$, resulta $f(x) = -2x$

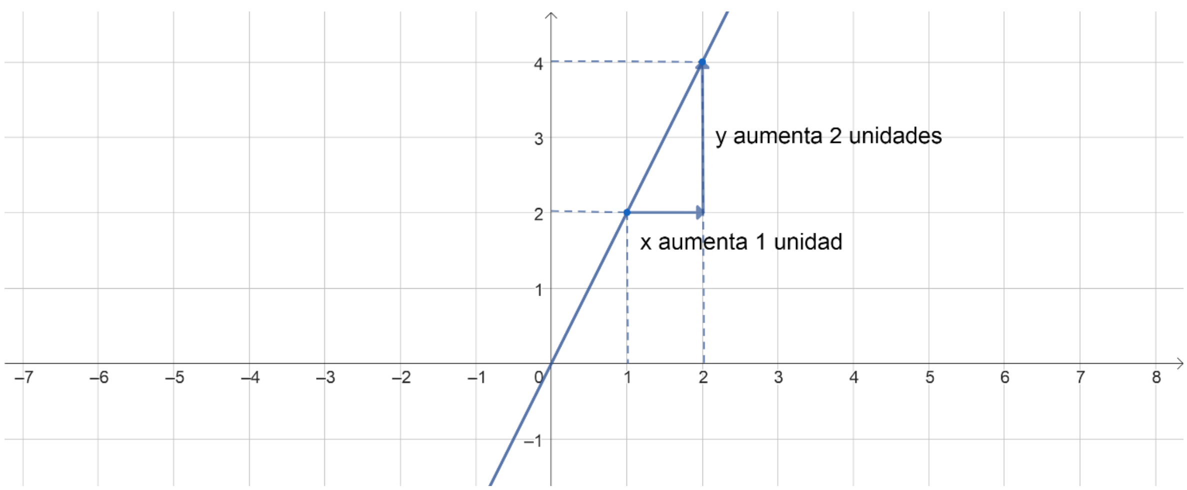


Observamos que al variar el valor de la constante a, la pendiente, varía la inclinación de las rectas.

- Si $a > 0$ la función es creciente
- Si $a < 0$ la función es decreciente

Consideremos nuevamente la función $f(x) = 2x$.

Los puntos $(1;2)$ y $(2;4)$ pertenecen a la gráfica de f. Cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 2 unidades.



La pendiente a nos indica el aumento que experimenta y cuando x aumenta una unidad. Esta variación es **constante**.

En general, si los puntos $(x_1;y_1)$ y $(x_2;y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, pertenecen a la gráfica de f para $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ es:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Ecuación de la recta conocidos dos puntos

Si se tienen dos puntos que pertenezcan a una recta, se puede conocer su ecuación calculando a y b a partir de los pares ordenados $(x_1;y_1)$ y $(x_2;y_2)$. La pendiente se averigua reemplazando los valores dados en:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con el valor de la pendiente y tomando uno de los puntos, se reemplaza en la ecuación $y = ax + b$ y se despeja b.

Ejemplo.

Hallar la recta que pasa por los puntos $(1;3)$ y $(2;6)$.

En primer lugar calculamos la pendiente:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow a = \frac{6-3}{2-1} = 3$$

Luego se reemplazan los valores de a y de uno de los puntos en la ecuación general:

$$y = ax + b \rightarrow 6 = 3.2 + b \rightarrow b = 0$$

La ecuación entonces es: $y = 3x$

Ecuación de la recta conocida su pendiente y un punto

Queremos encontrar una expresión que nos permita hallar la ecuación de una recta cuando conocemos su pendiente y un punto de la misma.

Supongamos que la recta tiene pendiente a y pasa por el punto $(x_0;y_0)$.

Sabemos que la expresión de la recta dada su pendiente y la ordenada al origen es

$$y = ax + b$$

Para hallar b, suplantamos las coordenadas del punto en la misma. Tenemos:

$$y_0 = ax_0 + b$$

Despejamos b es:

$$y_0 - ax_0 = b$$

Y reemplazamos en la ecuación $y = ax + b$

$$y = ax + y_0 - ax_0 \rightarrow y = a(x - x_0) + y_0$$

Entonces, la ecuación de la recta de pendiente a y que pasa por $(x_0;y_0)$ puede expresarme como:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Ejemplo.

Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $(1;3)$.

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

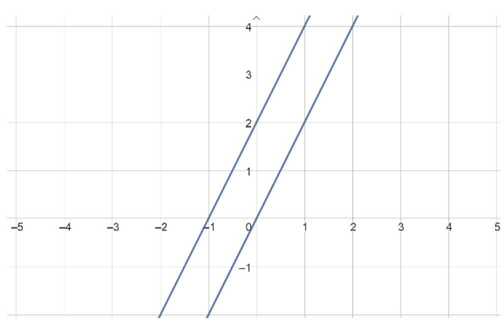
$$y - 3 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2 + 3$$

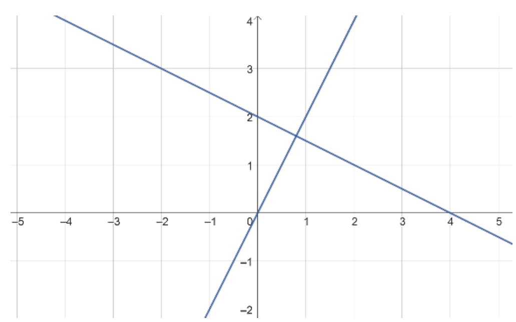
$$y = 2x + 1$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son paralelas cuando su pendiente es la misma. Por otro lado, dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son opuestas e inversas.



Rectas paralelas



Rectas perpendiculares

Función cuadrática

La función cuadrática es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a,b,c \in R \ y \ a \neq 0$.

Ejemplos.

1.$x^2 + 16 = 0$

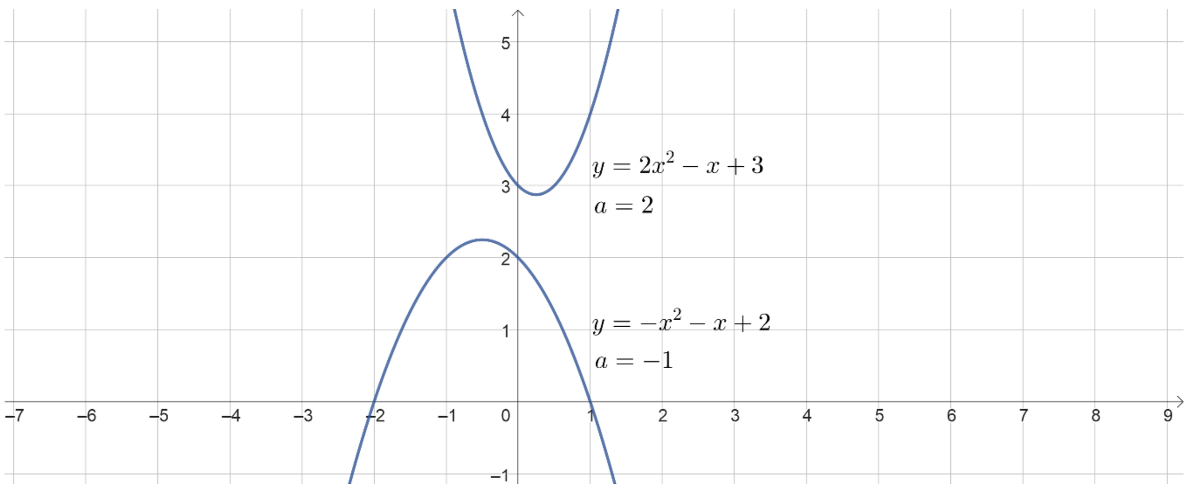
2. $x^2 - 7x - 18 = 0$

3. $3x^2 - 48 = 0$

La ecuación puede ser completa $ax^2 + bx + c = 0, con\ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ o puede ser incompleta:

- $b \neq 0, c = 0$, del tipo $ax^2 + bx = 0$
- $b = 0, c \neq 0$, del tipo $ax^2 + c = 0$
- $b = 0, c = 0$, del tipo $ax^2 = 0$

El dominio de la función cuadrática es el conjunto R. La gráfica es una parábola, cuyo vértice $(x_v;y_v)$ presenta un máximo si $a > 0$ o un mínimo si $a < 0$. La función es simétrica respecto de un eje paralelo al eje y que pasa por el vértice.



Expresiones de la función cuadrática

Existen tres formas de expresar una función cuadrática:

1. **Forma polinómica**

   $y = ax^2 + bx + c$

2. **Forma canónica.** Hace uso de los valores del vértice $(x_v;y_v)$

   $y = a(x - x_v)^2 + y_v$

3. **Forma factorizada**. Presenta los valores de las raíces:

   $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Las raíces o ceros se pueden hablar mediante la aplicación de la resolvente, o complementando los cuadrados. El método más utilizado es la aplicación de la resolvente o fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como ya vimos, el discriminante $b^2 - 4ac$ determina los tipos de raíces de la función:

Si $b^2 - 4ac > 0$, ambas raíces son reales y distintas

Si $b^2 - 4ac = 0$, ambas raíces son reales e iguales

Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son complejas y conjugadas

Otro método de resolución es el de completar cuadrados, consiste en transformar la ecuación cuadrática en el cuadrado de un binomio.

Ejemplo.

Hallar las raíces de $x^2 + 8x + 12$

Procedimiento:

1. Se iguala la ecuación a cero y se despeja el término c

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x^2 + 8x = -12$$

2. Se divide por 2 el coeficiente b y el resultado se eleva al cuadrado

$$\frac{8}{2} = 4$$

$$4^2 = 16$$

3. El valor obtenido se suma a ambos lados de la igualdad

$$x^2 + 8x + 16 = -12 + 16$$

4. La expresión obtenida es un trinomio cuadrado perfecto, se lo expresa como un cuadrado de un binomio

$$(x + 4)^2 = 4$$

5. Se aplica la raíz cuadrada a ambos miembros, por lo que el valor de la derecha pude resultar tanto positivo como negativo.

$$(x+4)^2 = \sqrt{4}$$

$$x+4 = \pm\, 2$$

6. Se despeja x, obteniéndose los dos valores de las raíces

$$x_{1,2} = \pm\, 2 - 4$$

$$x_1 = -2, x_2 = -6$$

Observación: En el primer paso debe dividirse cada término por el coeficiente a.

Otras funciones

Función racional

La función racional tiene la forma

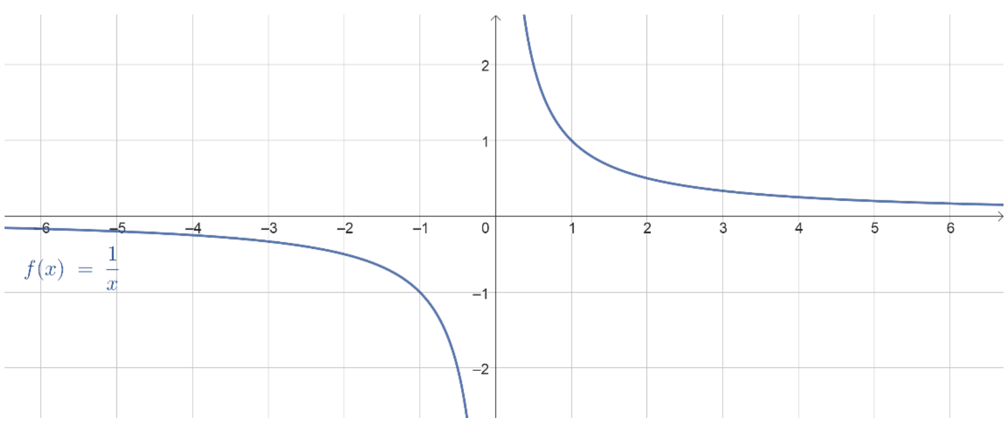
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x) y$ $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

Cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado 1, la función racional tiene la forma:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Este caso particular de las funciones racionales recibe el nombre de función homográfica.

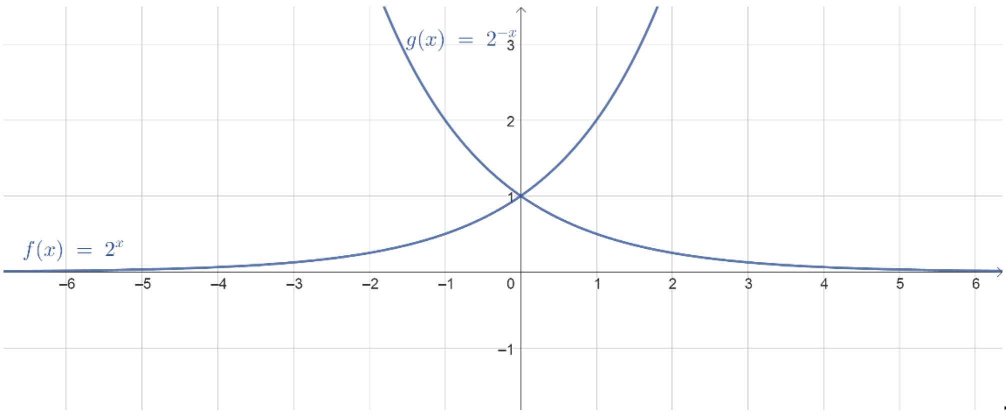


Función exponencial

La función exponencial tiene la forma

$$f(x) = a^x$$

siendo $a \in R, a > 0 \; y \; a \neq 1$.

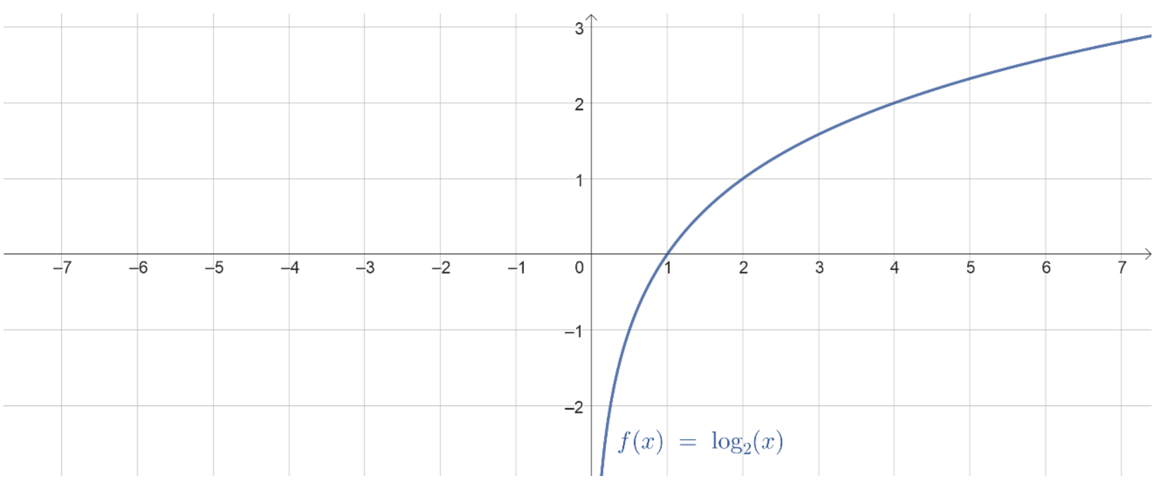


Función logarítmica

La función logarítmica es la inversa de la exponencial, de modo tal que tiene la forma

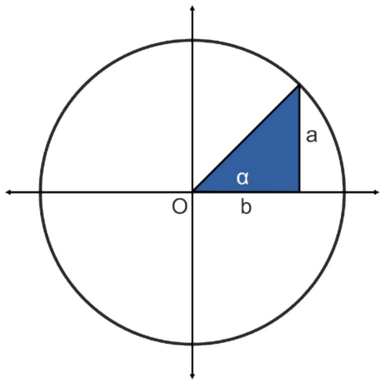
$$f(x) = \log_a x$$

sí y sólo si $a \neq x$



Función trigonométrica

Sea una circunferencia de radio 1 y centro en $(0;0)$. Si el ángulo α formado por la hipotenusa y el eje positivo de las x está medido en radianes, se pueden definir distintas funciones trigonométricas de acuerdo a las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo que se forma.



$$sen\alpha = a$$

$$cos\alpha = b$$

$$tan\alpha = a/b$$

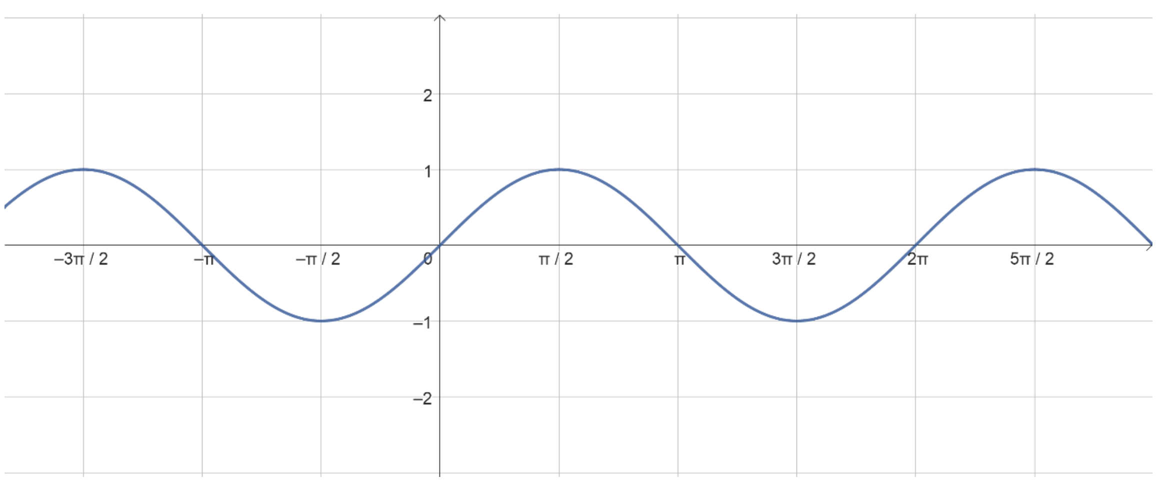
Las funciones trigonométricas son funciones **periódicas**, ya que el valor de la función se repite periódicamente; en este caso, cada 360° o 2π rad.

$$f(\alpha) = f(\alpha + 2\pi)$$

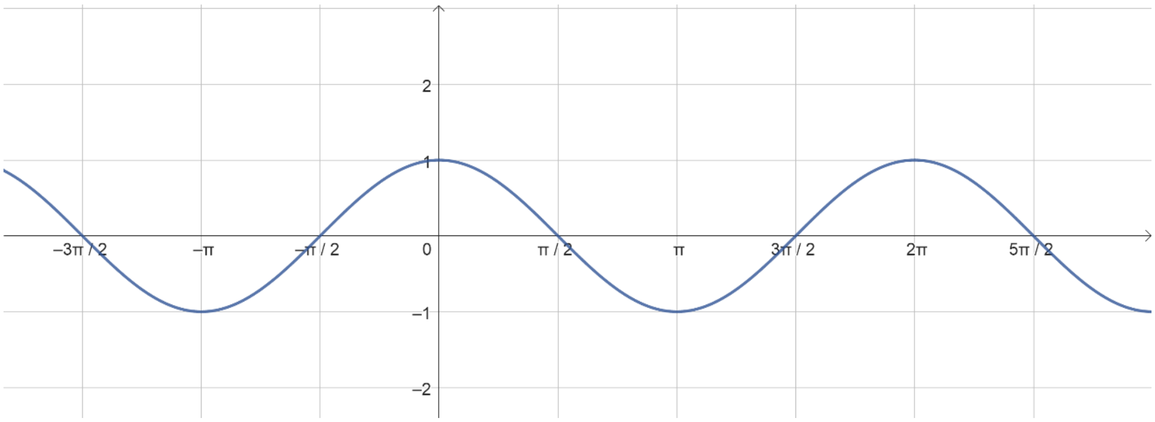
El signo de la función depende del cuadrante en el que se ubica el ángulo buscado. Por ejemplo, $sen\alpha$ es positivo en los cuadrantes I y II, y negativo en III y IV. El $cos\alpha$ es positivo en los cuadrantes I y IV, y la $tan\alpha$ en los cuadrantes I y III.

Observación: Cada cuadrante corresponde a 90° (o $\pi/2$) y se cuenta en sentido contrario a las agujas del reloj, comenzando en el eje positivo de las x.

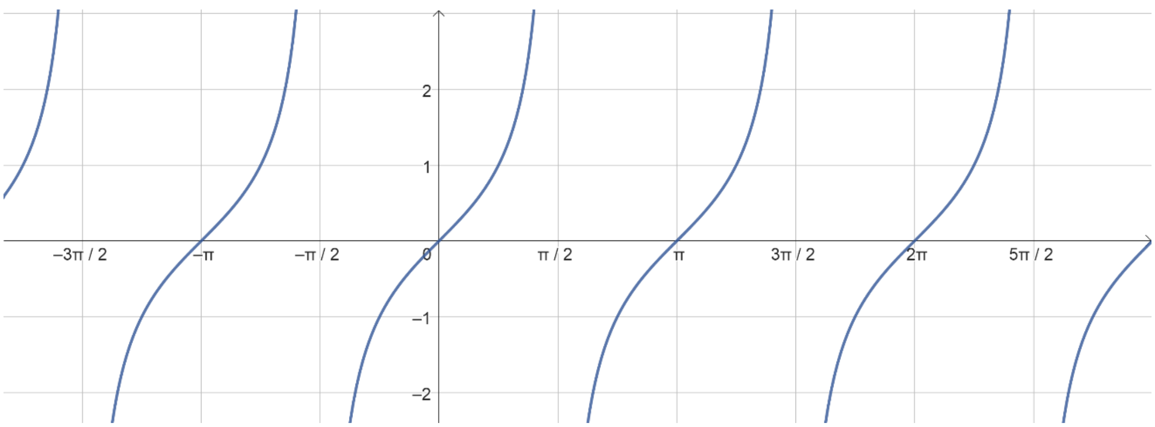
Función seno



Función coseno



Función tangente



Estudio analítico de funciones

El alcance del estudio analítico de una función para este seminario consistirá en determinar:

- Conjunto dominio
- Conjunto imagen
- Intersecciones con los ejes coordenados
- Conjunto de positividad y negatividad
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Ejemplo. Estudiar la función $f(x) = 2x + 3$

El dominio de una función es el conjunto de valores donde la función está definida.

Se deben hallar los valores de x donde la función no existe. En el caso de la función analizada, no existen valores de x para los cuales la función no está definida. Por lo tanto: $D_f = R$.

El conjunto imagen está formado por todos los elementos y que está asociado a un elemento x del dominio de la función.

Para la función en estudio, $Im_f = R$.

Las raíces o ceros de una función son los valores donde la misma corta el eje de las abscisas. Para encontrar estos puntos basta resolver:

$$f(x) = 0$$

En el caso analizado:

$$2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

El punto de corte de una función con el eje de las ordenadas (ordenada al origen) se obtiene resolviendo:

$$y = f(0)$$

Por lo tanto:

$$y = 2.0 + 3 = 3 \rightarrow y = 3$$

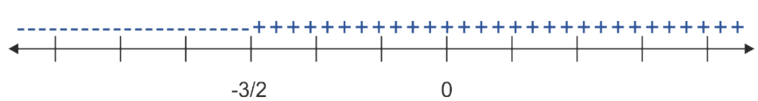
Los intervalos de positividad (C^+) de una función $f(x)$ son los intervalos de x en los cuales la función es positiva, es decir, donde $f(x) > 0$.

Los intervalos de negatividad (C^-) de una función $f(x)$ son los intervalos de x en los cuales la función es negativa, es decir, donde $f(x) < 0$.

Las raíces reales de una función, si es que existen, nos permitirán determinar los intervalos en los cuales la función es positiva y los intervalos en los cuales es negativa.

En nuestro caso, analizamos el signo de la función en los intervalos determinados por la raíz.

Signo $(2x + 3)$



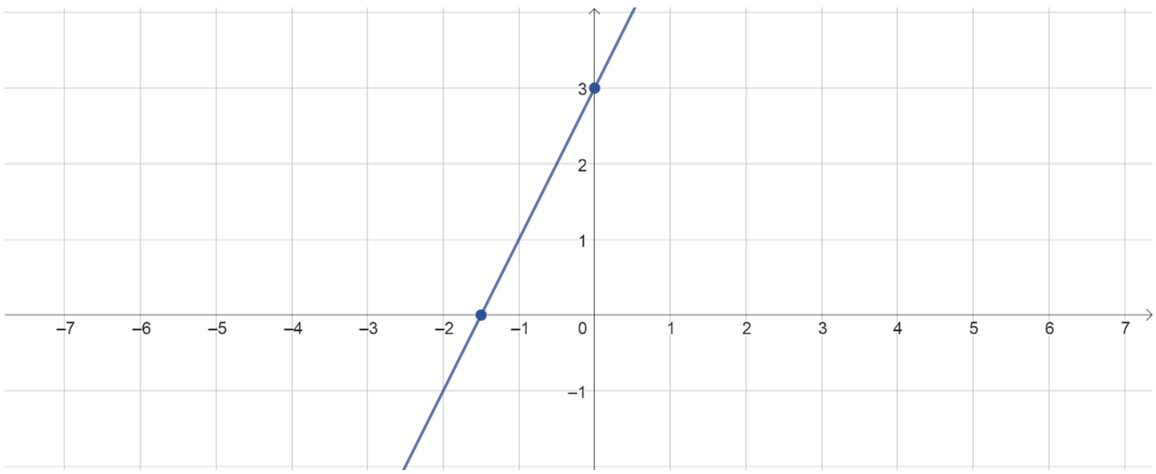
$C^+ = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$

$C^- = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

Un intervalo de una función es un intervalo de crecimiento si para todo x_1,x_2 que pertenecen a dicho intervalo y $x_1 < x_2$ es $f(x_1) < f(x_2)$

Un intervalo de una función es un intervalo de decrecimiento si para todo x_1,x_2 que pertenecen a dicho intervalo y $x_1 < x_2$ es $f(x_1) > f(x_2)$

Como se vio al estudiar función lineal, basta evaluar el signo de la pendiente. Para este caso, la función es creciente en todo su dominio.



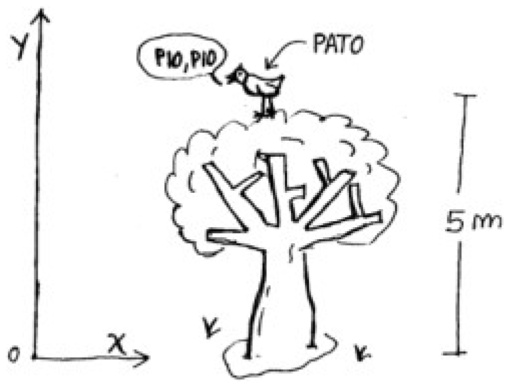
Introducción a la cinemática de la partícula

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, sin atender a las causas que lo producen. Pero ¿Cómo determinamos si un cuerpo está o no en movimiento?

Para responder a esta pregunta necesitamos definir un sistema de referencia desde el cual nos ubicaremos y observaremos el fenómeno en estudio.

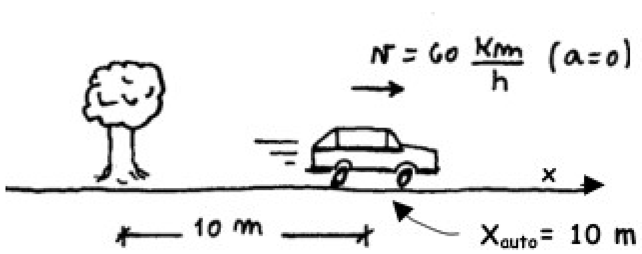
Un Sistema de referencia es un cuerpo o conjunto de cuerpos considerados fijos.

Ejemplo. Supongamos que tengo algo a 5 metros de altura. Para dar su posición tomo un eje vertical y. Con respecto a este eje digo:



La posición del pato es 5 m.

La posición es la ubicación de un cuerpo respecto de un sistema de referencia.



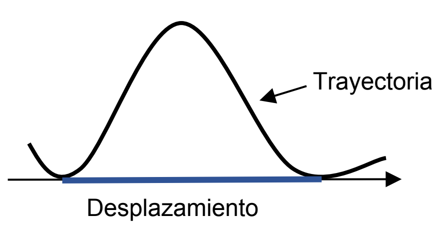
Si en el dibujo el árbol es el sistema de referencia vemos un vehículo a 10 m de un árbol.

El movimiento es el cambio de posición del objeto con respecto al tiempo.

La trayectoria es el conjunto de posiciones por las que pasa un cuerpo o sistema en estudio a medida que transcurre el tiempo.

Algunos ejemplos de formas de trayectorias pueden ser trayectoria rectilínea o trayectoria curvilínea.

El desplazamiento es el vector que conecta el principio y fin de una trayectoria.



Movimiento en una dimensión

El movimiento en una dimensión es el movimiento que se realiza en línea recta. Si vamos a estudiar el movimiento de un auto en línea recta necesitamos definir un sistema de referencia desde donde nos situemos para describir dicho movimiento. En un sistema de coordenadas, podríamos elegir al eje x como el lugar geométrico sobre el cual podríamos representar la trayectoria rectilínea del vehículo, colocando el origen 0 en el lugar donde éste partió.

Entonces, para describir este tipo de movimiento, podríamos observar la relación del cambio de la posición con el tiempo, que en lenguaje matemático se expresa: $x = x(t)$.

Ejemplo. Si en el siguiente esquema, colocamos el sistema de referencia en el punto $x = 0$, podemos decir que en un $t = 0$ el auto estaba a $x = -10\ m$ y en $6\ s$ recorrió $25\ m$, y su posición será de $x = 15\ m$.

$= \mathbf{6\ s}$

Podemos reflejar esta información en una tabla

Tiempo $(\boldsymbol{s})$	**Posición** $(\boldsymbol{m})$
0	-10
6	15

O sea, en el tiempo $t_0 = 0\ s$ el auto está en $x_0 = -10\ m$ y en $t_1 = 6\ s$ el auto está en $x_1 = 15\ m$. El vector desplazamiento que representa la modificación de la posición del auto, es un vector que tiene origen en x_0 y fin en x_1 y que calculamos como la diferencia de los vectores posición, $\Delta x = x_1 - x_0$, expresándose en el S.I. en metros (m).

<u>Nota:</u> la letra griega (Δ) se usa en física para representar variaciones, condiciones finales menos condiciones iniciales.

La distancia recorrida de un móvil sobre una trayectoria es la longitud recorrida por el móvil en su movimiento, siendo entonces una magnitud escalar.

Velocidad

Definimos la velocidad media (v_m) de un móvil en un intervalo de tiempo, como el cociente entre el desplazamiento y el intervalo del tiempo y la rapidez media o promedio como la relación entre la distancia que recorre el móvil y el tiempo que tarda en recorrerla.

Para el ejemplo que estamos estudiando, podemos expresar matemáticamente la velocidad media como:

$$v_m = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

En el caso de la rapidez (o velocidad), lo que se mide es la relación entre una distancia recorrida y el tiempo que se emplea para recorrerla. A diferencia de la velocidad media, la rapidez no es vectorial y se puede expresar matemáticamente como:

$$v = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado} = \frac{d}{t}$$

Diferencias clave entre velocidad y rapidez

1. La rapidez es una magnitud escalar, mientras que la velocidad es una magnitud vectorial.
2. La rapidez es la tasa o ritmo en el que un objeto cubre una distancia, mientras que la velocidad es el cambio de posición de un objeto, lo que equivale a una especificación de su rapidez y dirección de movimiento.
3. Cuando se trata de la rapidez, el objeto puede cambiar de dirección y aun así su rapidez media seguirá contando. Por otra parte, si se trata de la velocidad el objeto debe seguir una dirección constante; si la dirección cambia, también lo hace la velocidad.

Con los datos del ejemplo, podemos calcular la velocidad media así:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{15\ m - (-10\ m)}{6\ s - 1\ s} = \frac{25\ m}{5\ s} = 5\ m/s$$

$$Dirección{:}Eje\ x$$

$$Sentido{:}Sentido\ creciente\ del\ eje\ x$$

Recordemos que la velocidad media es una magnitud vectorial, por lo tanto para quedar definida debe indicarse, módulo, dirección y sentido.

Ejemplo. Un móvil recorrió 90 km en 4 horas. Determina la rapidez en m/s.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{90\ km}{4\ h} = \frac{90\ km}{4\ h} . \frac{1000\ m}{1\ km} . \frac{1\ h}{3600\ s} = 6{,}25\ m/s$$

Ecuaciones de movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento de una partícula puede ser descrito de dos maneras: una, con ecuaciones matemáticas, y otra, por métodos gráficos. Cualquiera de ellos es apropiado para el estudio de la cinemática. El enfoque matemático es usualmente mejor para resolver problemas, porque permite más precisión. El método gráfico es útil porque permite más introspección física que un grupo de ecuaciones matemáticas.

Hemos visto que los movimientos que se realizan a velocidad constante determinan una recta en el gráfico posición vs. tiempo. Nos preguntamos ahora: ¿qué parámetros o valores definen por completo una recta y la distinguen de cualquier otra? Estos son la pendiente y la ordenada al origen, o sea, la velocidad y la posición a $t = 0$.

Llamando a la posición inicial x_0 y v a la velocidad de un móvil que se desplaza a velocidad constante, podemos conocer la posición x al cabo de un tiempo t, a partir de la recta que queda definida por:

$$x = x_0 + v.t$$

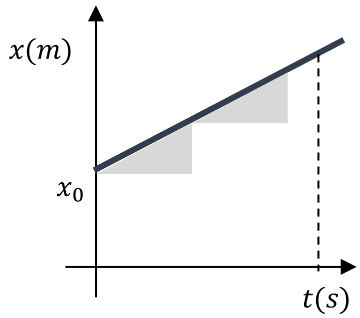


Gráfico posición vs. tiempo

De igual modo, si conocemos dos puntos de la recta, es decir una posición x_1 en un instante t_1 y la posición x_2 en t_2, podemos encontrar la ecuación que rige el movimiento con velocidad constante.

Ecuación de la recta: $y = ax + b$

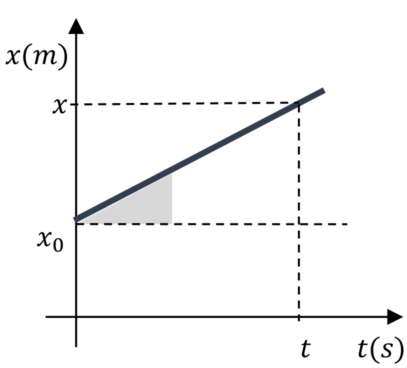
Ecuación que se corresponde con la ecuación del movimiento rectilíneo: $x = x_0 + v.t$

Donde x es la posición final, la intersección con el eje y (ordenada al origen) corresponde con el origen del movimiento (x_0) o posición inicial y el valor de la pendiente de la recta corresponde al valor de la velocidad del móvil v.

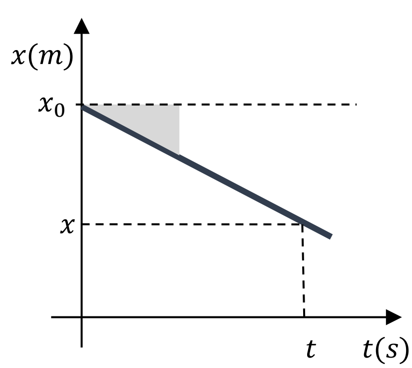
Gráficas de movimiento rectilíneo uniforme

Un cuerpo realiza un movimiento rectilíneo uniforme cuando su trayectoria es una línea recta y su velocidad es constante.

La gráfica posición-tiempo $(x - t)$ de un movimiento rectilíneo uniforme representa en el eje x el tiempo y en el eje y la posición. La posición aumenta (o disminuye) de manera uniforme con el paso del tiempo. Podemos distinguir dos casos, cuando la velocidad es positiva o negativa:



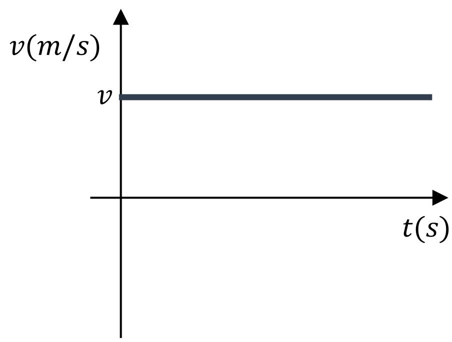
Velocidad positiva



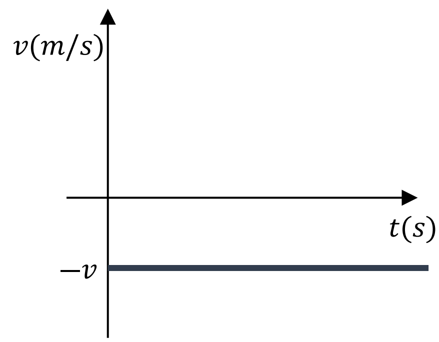
Velocidad negativa

El valor de la pendiente es la propia velocidad. Por tanto a mayor pendiente de la recta, mayor velocidad posee el cuerpo.

La gráfica velocidad-tiempo $(v - t)$ de un movimiento rectilíneo uniforme muestra que la velocidad permanece constante a lo largo del tiempo, $v = v_0 = constante$. Nuevamente, podemos distinguir dos casos:



Velocidad positiva



Velocidad negativa

Problema de encuentro

Se trata de determinar la posición y el instante en que se encuentran dos móviles de los cuales se conocen sus tipos de movimientos.

El encuentro entre dos móviles con M.R.U., de los cuales se conocen sus posiciones y velocidades iniciales. Se determinará el instante en que se produce el encuentro de dichos móviles y la posición en que ello ocurre.

Ejemplo. Supongamos que un móvil "A" parte desde una posición x_iA en un instante t_iA y con una velocidad constante vA. Otro móvil "B" parte desde una posición x_iB en un instante t_iB y con una velocidad constante vB.

Según la ecuación: $x = x_0 + v.t$

Datos

Móvil A:

$x_iA = 0\ km$

$t_iA = 10\ h$

$vA = 100\ km/h$

$xA = x_iA + vA.(t - t_iA)$

Móvil B:

$x_iB = 400\ km$

$t_iB = 11\ h$

$vB = -50\ km/h$

$xB = x_iB + vB.(t - t_iB)$

Igualando ambas expresiones se obtiene una ecuación de primer grado en t, la cual al resolverla arroja el valor del tiempo de encuentro t_e de los móviles.

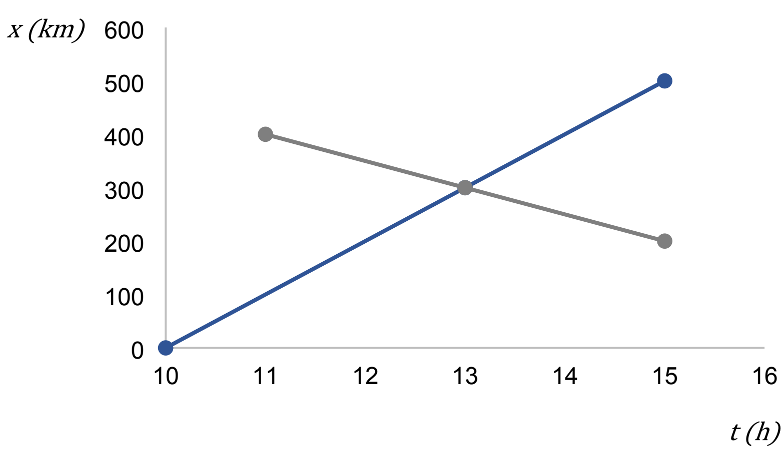
$$x_A = x_B$$

$$x_iA + vA.(t - t_iA) = x_iB + vB.(t - t_iB)$$

Es muy importante definir con precisión cual es el sistema de referencia que se va a utilizar, a fin de colocar correctamente los valores de las posiciones iniciales de ambos móviles, y considerar sus velocidades con el signo que corresponda según que el móvil vaya en el sentido de crecimiento del eje o no.

Para calcular la posición de encuentro hay que reemplazar el valor hallado de t_e en cualquiera de las expresiones de x_A o dex_B, calculando así la x_e.

La situación planteada puede graficarse en un gráfico cartesiano posición-tiempo.



En este ejemplo tenemos a un móvil A que parte desde un punto considerado como el origen de posiciones, a las 10 horas y en la dirección de crecimiento del eje (con una velocidad positiva de 100 km/h); y otro móvil B que parte a las 11 horas desde una posición distante 400 km del origen y en dirección contraria (con una velocidad negativa de -50 km/h).

El encuentro se produce a las 13 horas y a 300 km del origen, como puede verse proyectando el punto de intersección de ambas rectas sobre los ejes coordenados.