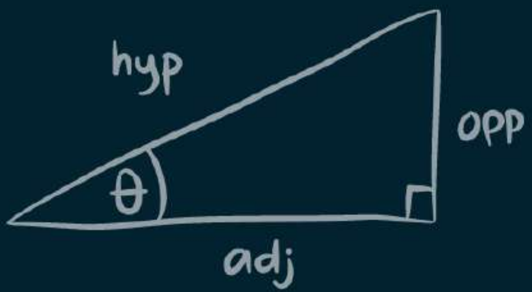
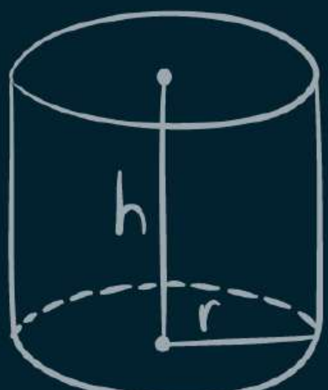


$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$$

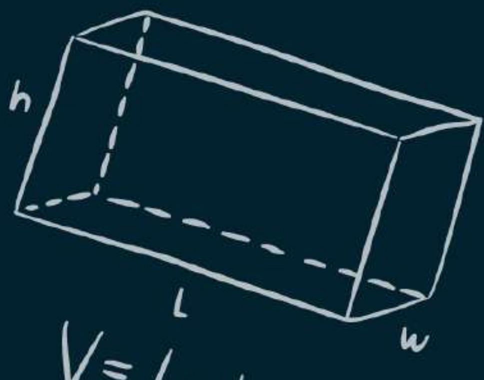
$$a + b = b + a$$

MATEMÁTICA

CURSO PREUNIVERSITARIO



$$V = \pi r^2 h$$



$$V = Lwh$$

Revisión de contenido y coordinación: Ing. Lewis Ivana Glenis
Compaginación y edición: Lic. Menna Cintia Yanina

aluar
Aluminio Argentino

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO

UTN FRCH
FACULTAD REGIONAL CHUBUT

El presente cuadernillo, que titulamos "Matemática Seminario universitario", disponible en formato digital, fue elaborado en el segundo semestre del año 2017, tomando como base el "Cuadernillo de ingreso 2014 Matemática teórico" confeccionado por docentes y alumnos de la Facultad Regional Chubut, además se ha trabajado con material de estudio recopilado de otras Facultades Regionales y Universidades, bibliografía afín, recursos Web, adecuando y precisando los contenidos requeridos por la normativa vigente en UTN: Lineamientos del seminario universitario. Resolución UTN CS Nº 865/2012.

Revisión de contenido y coordinación

Ing. Lewis, Ivana Glenis

Compaginación y edición

Lic. Menna, Cintia Yanina

Elaboración propuesta por

Secretaría Académica y Planeamiento

Ing. Bohn Diana Helga

Lic. Serra Mariana

Índice

MÓDULO 1. CONJUNTOS NUMÉRICOS. 6
- Definición conjuntos numéricos 6
- Operaciones entre conjuntos 6
- Cardinalidad de un conjunto 8
- Relaciones entre conjuntos 8
- Números naturales 8
- Números enteros 9
- Números racionales 11
- Números irracionales 14
- Números reales 14
- Números complejos 17
- Racionalización 20
- Factorización 20
- Expresiones algebraicas racionales. Simplificación 21

MÓDULO 2. ECUACIONES. 22
- ECUACIONES 22
  - Sistemas de ecuaciones lineales. 24
  - Resolución analítica de sistemas de ecuaciones lineales. 24
  - Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales 27
- INECUACIONES 29
  - Inecuaciones lineales con una variable 29
  - Sistema de inecuaciones lineales 30
- PROPORCIONALIDAD 33
  - Razón 33
  - Diferencia entre razón y fracción 33
  - Proporción 33
  - Constante de proporcionalidad 34
  - Propiedades de las proporciones 34

MÓDULO 3. FUNCIONES. 36
- FUNCIONES 36
  - Formas de expresar una función 36
  - Características globales de las funciones 37
  - Clasificación de las funciones 39
  - Funciones polinómicas 39

FUNCIÓN LINEAL 40
FUNCIÓN CUADRÁTICA 42
Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado 42
Definición función cuadrática 42
Expresión función cuadrática 43
OTRAS FUNCIONES 45
Función racional 45
Función exponencial 45
Función logarítmica 46
Función trigonométrica 47
ESTUDIO ANALÍTICO DE FUNCIONES 48
MÓDULO 4. GEOMETRÍA. 52
Nociones básicas de geometría 52
Figura geométrica 52
Clasificación de triángulos 52
Clasificación de cuadriláteros 53
Elementos de la circunferencia 53
Perímetro o Longitud 53
Área 54
Los cuerpos geométricos 55
Clasificación de los cuerpos geométricos 55
Volumen de los cuerpos geométricos 56
Algunos cuerpos geométricos. 57
MÓDULO 5. TRIGONOMETRÍA. 59
Trigonometría 59
Sistemas de medición de ángulos 59
Relación entre arco, radio y ángulo 61
Relaciones de equivalencias entre los dos sistemas 61
Conversión de los ángulos más comunes. 61
Aplicación de Trigonometría en triángulos rectángulos 62
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos 62
Teorema de Pitágoras 63
Teorema del seno 63
Teorema del coseno 64
Ángulo de elevación y ángulo de depresión 64
Circunferencia trigonométrica 65

Signo de las razones trigonométricas 66
Relaciones trigonométricas 66
Relaciones entre los ángulos de distintos cuadrantes 66
ANEXO I. LÓGICA SIMBÓLICA 68
ANEXO II. REVISIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA 73
ANEXO III. EXPRESIONES ALGEBRAICAS 96
ANEXO IV. GRÁFICAS DE FUNCIONES 103
ANEXO V. ANÁLISIS COMPRENSIÓN Y MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS FUNCIONALES 109
GLOSARIO 112
BIBLIOGRAFÍA 113

MÓDULO 1. CONJUNTOS NUMÉRICOS.

Definición conjuntos numéricos

Una lista o colección de objetos es un conjunto. Se denota mediante letras mayúsculas.

Ejemplo. A: {1,2,3} es el conjunto de los tres primeros números naturales.

Los elementos de un conjunto se encierran entre llaves y se separan entre sí con comas.

Un conjunto puede expresarse por **extensión** (enumerando todos los elementos que lo constituyen) o por **compresión** (brindando las propiedades que lo definen).

Ejemplo. B: {a, e, i, o, u} extensión

B: {x | x es vocal} comprensión

Dos conjuntos son **iguales** si tienen los mismos elementos, aunque estén repetidos o desordenados.

Ejemplo. A: {1,2,3}; B: {2,3,1}; C: {1,3,1,2}

A=B=C

Un conjunto es **vacío** cuando carece de elementos, se denota $\varnothing$.

Ejemplo. G: {personas vivas de más de 200 años de edad}

H: {x | (x^2=4) y x "impar"}

G= H= $\varnothing$

Observaciones:

- El conjunto $\varnothing$ no tiene elementos.
- El conjunto {$\varnothing$} no está vacío: tiene un elemento, que es el conjunto vacío; es un conjunto de conjuntos.
- El conjunto universal U contiene todos los elementos de los que se está tratando.

Operaciones entre conjuntos

Sean los conjuntos A y B se pueden definir las siguientes operaciones:

- **Unión (A $\cup$ B)** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B:
  (A $\cup$ B) = {1,3,4,5}

- **Intersección (A $\cap$ B)** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B:

$(A \cap B) = \{3,5\}$

- **Diferencia (A - B)** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B:
  $(A-B) = \{4\}$

- **Diferencia simétrica (A ∆ B)** es el conjunto de los elementos que solo pertenecen a A o a B:
  $(A \Delta B) = \{1,4\}$

- **Complemento (A ^{c})** es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A:
  $(A^c) = \{1\}$

En lenguaje simbólico:

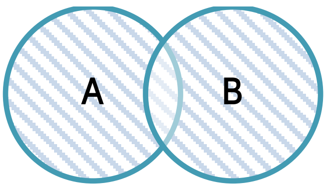
$(A \cup B) = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

$(A \cap B) = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

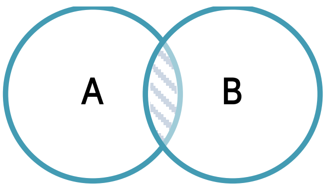
$(A - B) = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

$(A \Delta B) = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \wedge (x \notin (A \wedge B))\}$

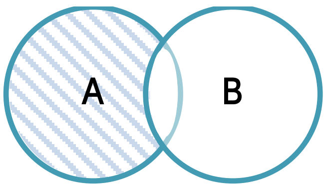
$(A^c) = \{x \mid (x \notin A\}$



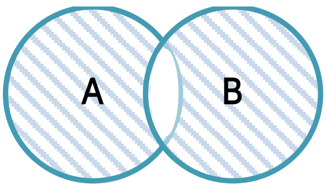
$(A \cup B)$



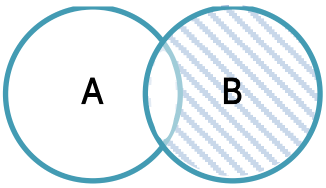
$(A \cap B)$



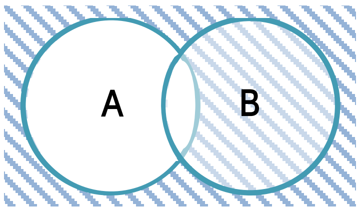
$(A - B)$



$(A \Delta B)$



$(B - A)$



$(A^c) = U - A$

Cardinalidad de un conjunto

Es el número de elementos de un conjunto A y se denota n(A).

Ejemplos. Número cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. A= $\{1,3,5,7\}$
   A tiene cuatro elementos, entonces n(A)= 4.

2. B= $\{x|$ x es un país de Norteamérica$\}$
   B tiene tres elementos, entonces n(B)=3.

3. C=$\varnothing$
   C no tiene elementos, entonces n(C)= 0.

Relaciones entre conjuntos

- A es un **subconjunto** de B (o A está contenido en B, simbolizado como $A \subset B$) implica que B tiene al menos un elemento que no está en A, A está incluido estrictamente en B.
- Si cada elemento de A es también elemento de B; o sea que si $x \in A$, entonces $x \in B$, A y B son iguales; es decir que $A \subset B$ y $B \subset A$ simultáneamente.

Números naturales

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío se los denomina **números naturales**. Designamos con N al conjunto de dichos números.

N=$\{1,2,3,4,5,6,...\}$.

Los números naturales también sirven para ordenar. Así, decimos que la tierra es el tercer planeta a partir del sol, que éste es el primer módulo del seminario universitario de ingreso, etc.

- La **suma** y el **producto** de dos números naturales es siempre un número natural.

Si $a, b \in N$ entonces $a+b \in N$ y $a.b \in N$.

- Sin embargo, no siempre la **diferencia** de dos números naturales es un número natural.

Si $a, b \in N$ y $b < a$ entonces $a - b \in N$

Ejemplos. $1 - 1 = 0 \notin N$ $1 - 2 = -1 \notin N$ $3 - 1 = 2 \in N$.

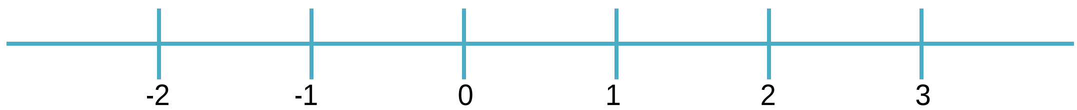
- Los números naturales están **ordenados**, podemos representarlos en la recta numérica como sigue:

- Si al conjunto de números naturales le agregamos el número cero obtenemos un nuevo conjunto que denotamos $N_o = N \cup \{0\}$.

- Por otro lado, si reemplazamos cada elemento del conjunto de los números naturales por su opuesto, es decir, en lugar de 1 escribimos -1, en lugar de 2 escribimos -2, y así siguiendo, obtenemos un nuevo conjunto que denotaremos
$N^- = \{-1,-2,-3,\ldots\} = \{-a / a \in N\}$.

$A \in N$ si, y solo si $-a \in N^-$

$N \cap N^- = \varnothing$ Es decir, no existe un número que pertenezca al conjunto de N y al conjunto de N^- en simultaneo.



Números enteros

Definimos al conjunto de los números enteros como: $Z = N^- \cup \{0\} \cup N$.

De esto resulta que todo número natural es un número entero.

- Si $b \in Z$ implica que $-b \in Z$.
- Si $a, b \in Z$ implica que $a+b \in Z$.
- Si $a, b \in Z$ implica que $a-b \in Z$ ya que $a-b= a+(-b)$; como $-b \in Z$ resulta que $a + (-b) \in Z$.
- Si $a, b \in Z$ implica que $a.b \in Z$.

Ejemplos.

$-2 \in Z$ implica que $-(-2)=2 \in Z$

$4,-5 \in Z$ implica que $4 + (-5)=-1 \in Z$

$4,-5 \in Z$ implica que $4 - (-5)=9 \in Z$

$4,-5 \in Z$ implica que $4 . (-5)=-20 \in Z$

No siempre la **división** entre dos números enteros es un número entero.

Ejemplo. $7:2=3,5 \notin Z$

Al realizar una división entre dos números enteros, puede que el resto sea distinto que cero.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Algoritmo de la división: Sean $a, b \in Z$, $a \neq 0$ existen enteros únicos q, r tales que $b= a. q + r$ con $0 \leq r < |a|$. "El resto de la división entre dos números enteros nunca puede ser negativo".

Ejemplos.

1. Para b=84, a=45, resultan q=1, r=39 ya que 84= 45.1+39.
2. Para b=84, a=-45, resultan q=-1, r=39 ya que 84= (-45).(-1)+39.
3. Para b=-84, a=45, resultan q=-2, r=6 ya que -84=45.(-2)+6
4. Para b=-84, a=-45, resultan q=2, r=6 ya que -84=(-45).2+6

Divisibilidad: Si r=0, resulta b= a. q y se dice que a divide a b (o que b es múltiplo de a, o que b es divisible por a, o que a es divisor de b).

Ejemplos.

1. 2 divide a 6 $\quad$ 6= 2. 3 + 0 $\quad$ de modo que r=0.

2. 5 no divide a 12 $\quad$ 12=5. 2 + 2 $\quad$ de modo que r=2. No existe ningún número entero que multiplicado por 5 de 12.

Un número entero a es primo si tiene exactamente cuatro divisores: 1, -1, a, -a.

Ejemplos. 2, 11, 463.

Máximo común divisor: Si se descomponen dos números enteros positivos a y b en sus factores primos, el máximo común divisor entre a y b, es el producto de los factores primos comunes, con el menor exponente. Se denota mcd= (a,b).

Ejemplo. Si a=72 y b=84 resulta:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$72=2^3 . 3^2$ $\qquad$ $84=2^2.3.7$

mcd (72, 84) = 2^2.3= 12 $\qquad$ Es decir, 12 es el mayor de los divisores comunes entre 72 y 84.

Mínimo común múltiplo: Si se descomponen dos números enteros positivos a y b en sus factores primos, el mínimo común múltiplo entre a y b es el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente. Se denota mcm (a,b).

Ejemplo. Tomando los números del ejemplo anterior resulta mcm (72, 84)= $2^3 . 3^2$.7=504, es decir que 504 es el menor de los múltiplos comunes entre 72 y 84.

Números racionales

Llamamos número racional a todo número que se puede expresar como fracción $\frac{n}{m}$ donde n y m son enteros y m $\neq$ 0. Con Q denotamos la totalidad de los números racionales.

- Todo número entero es racional, ya que si m $\in$ Z escribimos m= $\frac{m}{1}$ $\in$ Q. Es decir Z $\subset$ Q.

- La suma, la diferencia y el producto de dos números racionales es un número racional.

- El inverso de cualquier número racional no nulo, es un número racional.

- Los números racionales pueden expresarse como número decimal exacto o periódico. Ejemplos.
  1. El número racional tres cuartos puede expresarse como:

$$\underbrace{\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{75}{100}}_{\textit{forma fraccionaria}} = \underbrace{0{,}75 = 0{,}750 = \ldots}_{\textit{forma decimal}}$$

  2. $\frac{1}{2}$ = 0,5 $\longrightarrow$ Decimal exacto.
  3. $\frac{1}{3}$ = 0,333...=$0{,}\overset{\frown}{3}$ $\longrightarrow$ Período 3.
  4. $\frac{86}{11}$ = 7,818181...= $7{,}\overset{\frown}{81}$ $\longrightarrow$ Período 81
  5. $\frac{29}{6}$ = 4,833333...=$4{,}8\overset{\frown}{3}$ $\longrightarrow$ Período 3.

Cada parte de un número decimal tiene un nombre especial:

$$\overbrace{4}^{\textit{Parte entera}}\ ,\ \overbrace{8\ \overset{\frown}{3}}^{\textit{parte decimal}}$$

$\overset{\frown}{3}$ —— *Parte periódica*

8 —— *Parte no periódica*

A continuación indicaremos como pasar de la forma decimal a la forma fraccionaria.

Forma decimal		Observación	Ejemplos
Exactas		En el numerador aparece la parte decimal, y en el denominador tenemos el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tengo.	$0,75=\frac{75}{100}$ $0,015=\frac{15}{1000}$ $2,23=\frac{223}{100}$
Periódicas	Puras	En el numerador aparece la parte periódica, mientras que en el denominador tenemos tantos números 9 como cifras tiene el período.	$0,2525...=0,\overset{\frown}{25}=\frac{25}{99}$ $0,3333...=0,\overset{\frown}{3}=\frac{3}{9}$ $1,2828...=1,\overset{\frown}{28}=1+\frac{28}{99}=\frac{127}{99}$
	Mixtas	En el numerador aparece la diferencia entre la parte decimal y la parte decimal no periódica, mientras que en el denominador tenemos tantos números 9 como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.	$0,75454...=0,7\overset{\frown}{54}=\frac{754-7}{990}=\frac{747}{990}$ $12,75454...=12,7\overset{\frown}{54}=12+\frac{747}{990}$ $=\frac{12627}{990}$ $5,12444...=5,12\overset{\frown}{4}=5+\frac{124-12}{900}$ $=5+\frac{112}{900}=\frac{4612}{900}$

El **porcentaje** (%) es la razón $\frac{a}{b}$ entre dos números reales a, b que es comparado con 100 como referencia.

Porcentaje= $\frac{a}{b}.100\%$ con $b \neq 0$

Una **regla de tres simples** es la operación aritmética que permite hallar un cuarto valor, cuando se conoce los otros tres términos de una proporción. Es simple cuando simplemente intervienen dos magnitudes.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{D} C \\ A_2 \longrightarrow X \end{array}\right\} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{C}{X} \qquad X=\frac{A_2 \,.\, C}{A_1}$$

Números irracionales

A los números reales, que no se los puede expresar en forma de fracción, se los denomina **números irracionales**. Es decir, un número irracional expresado en forma decimal no es exacto ni periódico.

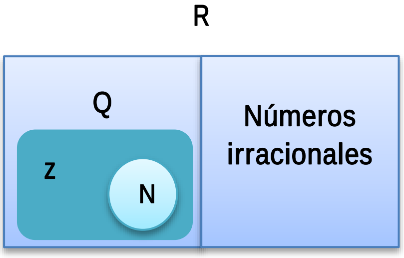
Ejemplos.

1. $\pi \cong 3{,}141592654$
   El símbolo $\cong$ indica que representa una aproximación del número irracional π. Notemos que también existen otras aproximaciones para este número, como son: 3,14; 3,141; 3,14159; 3,1416. El número π aparece al calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo.

2. $e \cong 2{,}71$
   Representa una aproximación del número irracional e. Al efectuar cálculos en los que intervienen los números irracionales, tomamos una cantidad finita (entre 3 y 5) de cifras decimales. Por lo tanto podemos considerar $e \cong 2{,}718$ o bien $e \cong 2{,}71828$. El número e se presenta en procesos de crecimiento de una población animal o vegetal, y en problemas de desintegración radiactiva, entre otros.

Números reales

La unión del conjunto Q de números racionales, y el conjunto de los números irracionales es el conjunto de los números reales R.

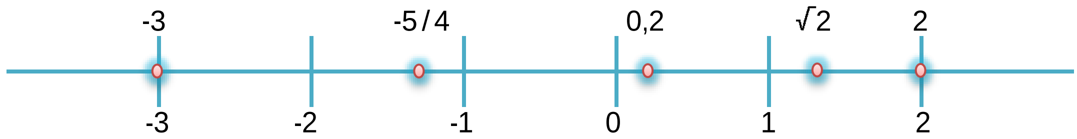


Todos los números que hemos estudiado hasta el momento son números reales. El conjunto de los números reales también puede representarse sobre una recta. A cada número real le corresponde un único punto de la recta, y cada punto de la recta representa un único punto real. A esta recta la llamamos recta real.

No siempre somos capaces de representar exactamente a un número real, sin embargo, siempre es posible obtener una representación aproximada de ella a partir de su expresión decimal.

No existe un número real que sea mayor o igual a todos los demás, ni uno que sea menor o igual a todos los demás. Además entre dos números reales dados cualesquiera existen infinitos números racionales, e infinitos números irracionales.

Ejemplos. La representación de los números: $\sqrt{2}$;-3; 0,2; -5/4 y 2 es:



Siempre podemos comparar dos números reales cualesquiera. Dados dos números reales a y b, se tiene una y sola una de las siguientes situaciones: $a<b$; $a>b$; $a=b$

Esto nos permite representar "ordenadamente" los números reales en la recta numérica. Además se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\forall$ a, b $\in$ R, $a < b \Leftrightarrow a+c < b+c$.
- $\forall$ a, b, c $\in$ R, $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$
- $\forall$ a, b, c $\in$ R, $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

Ejemplos.

1. $-3 < 4 \Leftrightarrow -3+1 < 4+1$.
2. $-3 < 4$ y $2>0 \Rightarrow -3.2 < 4.2$.
3. $-3 < 4$ y $-2<0 \Rightarrow -3.(-2) > 4.(-2)$.

Potenciación. Recordemos que $a^n = \underbrace{a.\,a.\,a.\,a\ldots\,a}_{n\ veces}$

Donde a es un número real al que denominaremos base, y n un número natural al que llamaremos exponente.

Ejemplo.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$

Extensión de la definición de potenciación a exponentes enteros. Por convención se tiene para $a \neq 0$ que $a^0=1$ y $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Ejemplo.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

Algunas propiedades importantes que debemos recordar son:

- **Producto de potencias con la misma base**. $a^m . a^n = a^{m+n}$
  Ejemplos. $2^2 . 2^3 = 2^5$ / $x^4 . x^{-2} = x^2$

- **Cocientes de potencias con la misma base**. $a^m : a^n = a^{m-n}$
  Ejemplos. $2^3 : 2^3 = 2^0 = 1$ / $x^4 : x^{-2} = x^6$

- **Potencia de una potencia.** $(a^m)^n = a^{m.n}$
  Ejemplos. $(3^{-5})^3 = 3^{-15}$ / $(x^{-2})^{-1} = x^2$

- **Potencia de un producto.** $(a. b)^n = a^n . b^n$
  Ejemplos. $(2. 5)^{-2} = 2^{-2} . 5^{-2}$ / $(x.y^2)^3 = x^3 . y^6$

- **Potencia de un cociente.** $(a: b)^n = a^n : b^n$
  Ejemplos. $(2:5)^{-2} = 2^{-2} : 5^{-2}$ / $(x:y^2)^3 = x^3 : y^6$

Radicación. Definimos $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Donde n es un número natural.

$\sqrt[n]{a}$ se lee “raíz n-ésima de a”. Denominamos a n índice de la raíz, y a radicando.

Observemos que para que la definición tenga sentido:

- Si n es impar, a puede ser cualquier número impar.
  Ejemplo. $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$

- Si n es par, a debe ser un número real positivo.
  Ejemplo. $\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 81$

La raíz n-ésima de un número suele también denotarse como potencia. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Además $\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$ si $a \geq 0$

Observemos que si a < 0, esta afirmación no siempre tiene sentido, ya que pueden presentarse casos como el siguiente:

$(-3)^{4/2} = \sqrt{(-3)^4}$ pero $(-3)^{4/2} = ((-3)^{1/2})^4 = (\sqrt{-3})^4$ no tiene sentido en el conjunto de los R.

También se satisfacen las siguientes propiedades:

- $a > 0, b > 0$ y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$
  Ejemplo. a=2 b=3 , $2 < 3$, $2^{-1} > 3^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

- $a < 0, b < 0$ y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$
  Ejemplo. $a = -\frac{3}{2}$ $b = -\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2} < -\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} > \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$

El siguiente cuadro resume las propiedades que verifican las operaciones de suma, producto, potencia y raíz en R y en cada subconjunto de este.

OPERACIONES	PROPIEDADES		N	Z	Q	R
Suma	1.Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	x	x	x	x
	2.Conmutativa	$a+b=b+a$	x	x	x	x
	3.Elemento neutro	0		x	x	x
	4.Elemento opuesto de a	$-a$		x	x	x
Producto	1.Asociativa	$(a.b).c=a.(b.c)$	x	x	x	x
	2.Conmutativa	$a.b=b.a$	x	x	x	x
	3.Elemento neutro	1	x	x	x	x
	4.Elemento inverso de a $a\neq 0$	$\frac{1}{a}$			x	x
Suma-producto	1.Distributiva	$a.(b+c)=a.b+a.c$	x	x	x	x
Potencias	1.Producto de potencias con la misma base	$a^m.a^n=a^{m+n}$	x	x	x	x
	2.Cociente de potencias con la misma base	$a^m:a^n=a^{m-n}$	x	x	x	x
	3.Potencia de una potencia	$(a^m)^n=a^{m.n}$	x	x	x	x
	4.Potencia de un producto	$(a.b)^n=a^n.b^n$	x	x	x	x
	5.Potencia de un cociente	$(a:b)^n=a^n:b^n$	x	x	x	x
Raíces	1.Producto de raíces con el mismo índice	$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$	x	x	x	x
	2.Cocientes de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$	x	x	x	x
	3.Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m.n]{a}$	x	x	x	x
	4.Potencia de un radical	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$	x	x	x	x

Observaciones:

- En el conjunto de los números naturales no existe elemento neutro para la suma. Además ningún número natural posee elemento opuesto.
- Excepto el 1, ningún número entero no nulo posee inverso multiplicativo.
- Las propiedades son válidas en cada conjunto, siempre que las expresiones involucradas tengan sentido.

Números complejos

No es cierto en general, que la raíz cuadrada de un número real sea siempre un número real, por ejemplo, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea -4, es decir, no existe $a \in R$ tal que $a^2=-4$.

La unidad imaginaria i cumple la propiedad: $i^2=-1$, también se suele escribir $\sqrt{-1}$ en lugar de i. A los números de la forma a+b i donde a y b son reales se les llama números complejos. Al conjunto formado por dichos números se los denota C.

En un número complejo a+b i, con a,b $\in$ R, a se llama parte real, y se la denota con a=Re(a+b i), y b se llama parte imaginaria y se la denota con b=Im(a+bi).

Para el número complejo a+b i:

- Si a=0, el número complejo solo tiene parte imaginaria, es decir, es imaginario puro.
- Si b=0, el número complejo solo tiene parte real, por lo tanto, el conjunto R de los números reales está incluido en el conjunto C de los números complejos.
- La parte imaginaria está conformada solo por b. No es cierto que la parte imaginaria de $2+4i$ sea $4i$, sino que $Im(2+4i)=4$.

A dos números complejos se los llama conjugados si tienen la misma parte real y opuesta su parte imaginaria.

Ejemplos. $3+2i$ y $3-2i$ / $-5+\sqrt{3}i$ y $-5-\sqrt{3}i$

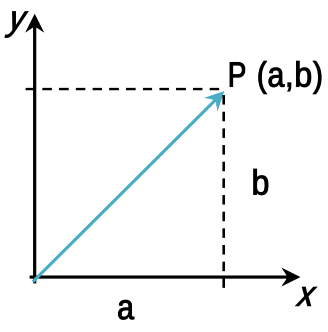
En el conjunto de los números complejos tiene sentido las propiedades de raíces, sin tener en cuenta el signo del radicando.

Ejemplos.

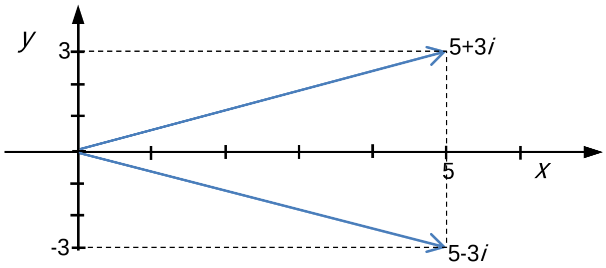
1. $\sqrt{-4}=\sqrt{4.-1}=\sqrt{4}\ .\ \sqrt{-1}=2i$.
2. $(-3)^{4/2}=\sqrt{(-3)^4}=9$
3. $(\sqrt{-3})^4=(\sqrt{3}i)^4=(\sqrt{3})^4.\ i^4=9.\ 1=9$

El número complejo a+b i se representa en el plano mediante el punto P de coordenadas (a, b). El eje de las abscisas se llama eje real, y el de las ordenadas eje imaginario. De esta forma, a cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

Si unimos el origen con el punto P obtenemos un segmento orientado que llamamos vector y representamos por $\overrightarrow{OP}$, así a cada número complejo le corresponde un vector.



Ejemplo. Representamos 5+3*i* y su conjugado 5-3*i*.



La **suma** y **resta** de números complejos se realiza sumando o restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí respectivamente.

Ejemplos.

1. (2+3*i*) + (8-5*i*) = (2+8) + (3+(-5))*i* = 10 - 2*i*

2. (2+3*i*) - (8-5*i*) = (2-8) + (3-(-5))*i* = -6 + 8*i*

El **producto** de dos números complejos se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y recordando que i2=-1.

La **división** de dos números complejos se realiza multiplicando dividendo y divisor por el complejo conjugado del divisor.

Ejemplo. $\frac{20+30i}{3+i}=\frac{(20+30i).(3-i)}{(3+i).\,(3-i)}=\frac{60+90i-20i-30i^2}{9-i^2}=\frac{90+70i}{10}=9+7i$

Racionalización

En ciertas expresiones en las que intervienen raíces es conveniente transformar el numerador o el denominador en un número entero, a continuación detallaremos dos fórmulas que son de utilidad en estos casos. Ambas se verifican aplicando la propiedad distributiva.

Cuadrado de un binomio. $(a+b)^2 = (a+b) \,.\, (a+b) = a^2 + 2.a.b + b^2$

Diferencia de cuadrados. $(a+b) \,.\, (a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplos.

1. $\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{13}).\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}-\sqrt{13.3}}{3} = \frac{2.\sqrt{3}-\sqrt{39}}{3}$

2. $\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(5+\sqrt{5}).\ (\sqrt[3]{2})^2}{\sqrt[3]{2}.(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{5.\sqrt[3]{4}+\sqrt{5}.\sqrt[3]{4}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2-2.\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3-2.\sqrt{6}+2}{3-2} = 5-2.\sqrt{6}$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como producto de nuevas expresiones más simples. A continuación presentamos algunos casos de factorización.

1. **Factor común**. En la expresión $a.b^2+2.a^2.b^2-3.a.b^3$, el factor $a.b^2$ aparece en todos los términos, por lo que podemos expresar: $a.b^2+2.a^2.b^2-3.a.b^3 = a.b^2.(1+2.a-3.b)$.

2. **Trinomio cuadrado perfecto ⟷ Cuadrado de un binomio.** La forma general de un trinomio cuadrado perfecto es $a^2+2.a.b+b^2= (a+b)^2$. Verificamos que estas expresiones son equivalentes aplicando propiedad distributiva.
   $(a+b)^2= (a+b).(a+b)=a^2+a.b+b.a+b^2= a^2+2.a.b+b^2$.

3. **Diferencia de cuadrados ⟷ Suma por diferencia.** La forma general de una diferencia de cuadrados es $a^2-b^2= (a+b).(a-b)$. Veamos efectivamente que estas expresiones son iguales.
   $(a+b).(a-b)= a^2 - a.b + b.a - b^2= a^2-b^2$.

Expresiones algebraicas racionales. Simplificación

Las operaciones con expresiones algebraicas racionales son similares a las operaciones entre fracciones. De esta forma, para **sumar** dos de estas expresiones debemos factorizar el denominador y encontrar un denominador común.

Ejemplo.

$$\frac{a^2}{a^2+3.a}+\frac{a+9}{a^2+6.a+9}-1=\frac{a^2}{a.(a+3)}+\frac{a+9}{(a+3)^2}-1=\frac{a.\,(a+3)+a+9-(a+3)^2}{(a+3)^2}$$

$$=\frac{a^2+3.a+a+9-a^2-6.a-9}{(a+3)^2}=\frac{a^2+4.a+9-a^2-6.a-9}{(a+3)^2}=-\frac{2.a}{(a+3)^2}$$

También la **multiplicación** y **división** de expresiones algebraicas racionales es similar al caso de las fracciones. Para simplificar expresiones debemos en primer lugar, factorizar numeradores y denominadores.

Ejemplo.

$$\frac{a^2+6.a.b+9.b^2}{a^{-2}-(3.b)^{-2}}:\frac{a^2.b+3.a.b^2}{6.b-2.a}=\frac{(a+3.b)^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{9.b^2}}:\frac{a.b.(a+3.b)}{2.(3.b-a)}$$

$$=\frac{a+3.b}{\frac{9.b^2-a^2}{9.a^2.b^2}}:\frac{a.b}{2.(3.b-a)}=\frac{(a+3.b).\,(9.a^2.b^2)}{(3.b-a).(3.b+a)}:\frac{a.b}{2.(3.b-a)}$$

$$=\frac{9.a^2.b^2}{(3.b-a)}:\frac{a.b}{2.(3.b-a)}=18.a.b$$

MÓDULO 2. ECUACIONES.

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas con una a más incógnitas. Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas con los que se logra igualar los dos miembros de la misma.

Una ecuación lineal tiene la forma **a x + b = 0**, con a, b $\in$ R y a $\neq$ 0.

Ejemplos.

1. $x + 8 = 3$
   $x = 3 - 8$
   $x = -5$ S= $\{-5\}$

2. $2x - 3 = \frac{1}{2}$
   $2x = \frac{1}{2} + 3$
   $x = \frac{7}{4}$ S= $\{\frac{7}{4}\}$

3. $3x - 1 = -2x + 4$
   $3x + 2x = 4+1$
   $5x = 5$
   $x = 1$ S= $\{1\}$

4. $4 - 5(4x - 2) = x - 3(2x + 1)$
   $4 - 20x + 10 = x - 6x - 3$
   $-20x - x + 6x = -3 - 4 - 10$
   $15x = 17$
   $x = \frac{17}{15}$ S= $\{\frac{17}{15}\}$

5. $5 - 2(x + 3) = -\frac{1}{2}(4x + 2)$
   $5 - 2x - 6 = -2x - 1$
   $-2x + 2x = -1 + 6 - 5$
   $0x = 0$ S= $\{R\}$ Esto implica que cualquier x $\in$ R es solución de la ecuación (infinitas soluciones).

6. $3x - 1 = 6(\frac{x}{2} + 5)$
   $3x - 1 = 3x + 30$
   $3x - 3x = 30 + 1$
   $0x = 31$ S= $\{\emptyset\}$ No existe ningún valor que satisfaga la ecuación.

Una ecuación cuadrática tiene la forma **$a\,x^2 + bx + c = 0$**, con a, b, c $\in$ R y a $\neq$ 0.

Para resolverla se aplica la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La resolución de la misma puede interpretarse geométricamente como hallar el / los valores de las abscisas al origen de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, es decir hallar los valores de x para los cuales y=0.

Para hacer el estudio sobre la naturaleza de las raíces, hay que evaluar la expresión que aparece dentro de la raíz cuadrada de la formula resolvente, a la cual se denomina discriminante y se denota por: $\Delta = b^2 - 4ac$.

	Solución	**Gráficamente**
$\Delta > 0$	Dos soluciones reales distintas	La parábola intersecta en dos puntos al eje x.
$\Delta = 0$	Una solución real	La parábola intersecta en un punto al eje x, que es el vértice.
$\Delta < 0$	No tiene soluciones reales	La parábola no intersecta al eje x.

Ecuaciones expresadas en forma factorizada: Si el producto de varios factores es cero, por lo menos uno de ellos es cero. Si a . b = 0 entonces a = 0 o b = 0.

Ejemplos.

1. $-8(x-1) = 0$
   $-8 \neq 0$
   $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ S= $\{1\}$

2. $(3x + 2)x = 0$
   Debe ser:
   $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
   ó $x = 0$ S= $\{0, -\frac{2}{3}\}$

3. $(3x + 2)(5 - x)(\sqrt{3} - 2x) = 0$
   Debe ser:
   $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
   $5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$
   $\sqrt{3} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ S= $\{-2/3, 5, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

4. $\frac{3 - 2x}{x + 2} = 0$
   Para que se anule el cociente debe ser:
   $3 - 2x = 0$ y $x + 2 \neq 0$
   De $3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ S= $\{\frac{3}{2}\}$
   Como ese valor no anula al denominador, es solución de la ecuación.

$$\frac{2 - 2(x - 1)}{-2x + 4}$$

5. $= 0 \qquad x \neq 0$

Debe ser entonces
$2 - 2(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 \qquad S= \{\varnothing\}$

Sistemas de ecuaciones lineales.

En algunas situaciones, interesa analizar si existe o no valores que verifican condiciones que se cumplan simultáneamente y, en el caso de que existan, averiguar de qué valores se trata.

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \text{ con a y b no simultáneamente nulos.} \\ dx + ey + f = 0, \text{ con d y e no simultáneamente nulos.} \end{cases}$$

Resolución analítica de sistemas de ecuaciones lineales.

Trataremos ahora de hallar la solución simultánea de varias ecuaciones lineales, esto es, deseamos encontrar los valores de las incógnitas que verifiquen todas las ecuaciones planteadas al mismo tiempo.

Nos interesamos en dar solución a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, usualmente llamados sistemas de 2x2.

Son varios los métodos que podemos emplear para dar solución a los problemas. A continuación resolvemos el problema aplicando cada uno de ellos.

Método de resolución	**Soluciones**	**Denominación del sistema**
I. Sustitución $\begin{cases} y - 2x = -3 \ (1) \\ y - x = 2 \ (2) \end{cases}$ De la ecuación 1 despejamos el valor de y y lo sustituimos en la 2: $y = 2x - 3$ (*). Reemplazando en la ecuación 2: $(2x - 3) - x = 2 \Rightarrow 2x - 3 - x = 2 \Rightarrow$ $2x - x = 2 + 3 \Rightarrow x = 5$ Si $x = 5$ hallamos el valor de y reemplazando en (*): $y = 2.5 - 3 = 7$ Entonces la solución del sistema en el par de valores de x e y **S: (5;7)**	Única	Compatible determinado
II. Eliminación por suma o resta $\begin{cases} y - x = 1 \ (1) \\ 2y - 2x = -6 \ (2) \end{cases}$ Reemplazando la ecuación por su equivalente, dividiendo miembro a miembro por 2 a la (1). Ahora el sistema tiene la forma: $\begin{cases} y - x = 1 \\ y - x = -3 \end{cases}$ Restando a ambos miembros estas ecuaciones se obtiene: $0 = -4$ Expresión absurda que nos indica que el sistema no tiene solución. ¿Cómo resultan geométricamente las rectas que indica el sistema? De la primer ecuación: $y = x + 1$ Se trata de una recta de pendiente 1 y ordenada al origen 1. De la segunda ecuación: $y = x - 3$ Que identifica la ecuación de una recta de pendiente 1 y ordenada al origen -3. Llegamos entonces a la conclusión que las rectas que representan las ecuaciones del sistema tienen la misma pendiente, es decir, son paralelas. De aquí que el sistema sea incompatible. **S: (Ø)**	No tiene	Incompatible
III. Igualación Este método consiste en despejar de ambas ecuaciones del sistema la misma incógnita, y luego igualar las expresiones obtenidas. En nuestro ejemplo tenemos:	Infinitas	Compatible indeterminado

$\begin{cases} y = x+1 \ (1) \\ 2y = 2x + 2 \ (2) \end{cases}$ De la (2) se despeja y $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ Ahora, si los primeros miembros son iguales, los segundos también los son, entonces: $x + 1 = x + 1$ Lo que nos expresa que las dos ecuaciones del sistema, son idénticas, esto es, desde el punto de vista geométrico, representan la misma recta. En consecuencia, la solución de la recta son los infinitos puntos de la recta a la que ambas ecuaciones hacen referencia. En este caso decimos que el sistema es compatible indeterminado.		
IV. Determinantes Definición. Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (2x2) de la forma: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ Llamamos **determinante** del sistema al número: $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a.\ e - b.\ d$ Observación: las líneas II son la representación simbólica del determinante. Cuando este determinante es distinto de cero, podemos afirmar que el sistema tiene una sola solución que se calcula: $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{a.e - d.b} = \frac{c.e - b.f}{a.e - d.b}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{a.e - d.b} = \frac{a.f - d.c}{a.e - d.b}$ Para el ejemplo: $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{2.2 - (-1).(-3)}$ $x = \frac{1.2 - 3.(-3)}{2.2 - (-1).(-3)}$ $x = \frac{2 + 9}{4 - 3} = 11$	Única	Compatible determinado

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{2.2 - (-1).(-3)}$ $y = \dfrac{2.3 - (-1).1}{2.2 - (-1).(-3)} = \dfrac{6+1}{4-3} = 7$		

Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

Encontrar soluciones comunes a dos o más ecuaciones lineales es resolver un sistema de ecuaciones lineales. Para eso, utilizando propiedades de las igualdades, pueden transformarse las ecuaciones en otras equivalentes en su expresión general.

Ejemplo.

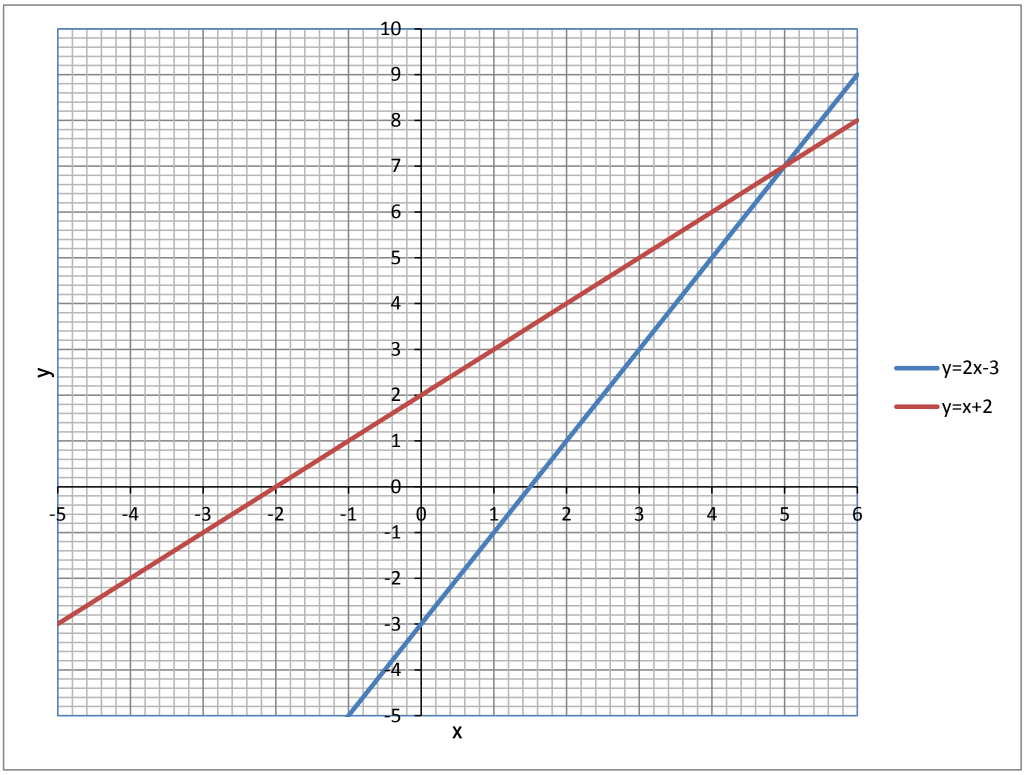
$$\begin{cases} y + 1 = 2(x + 1) \\ x + 1 = y - 1 \end{cases}$$

Puede escribirse de la forma en su forma general como:

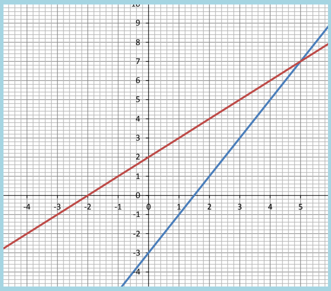
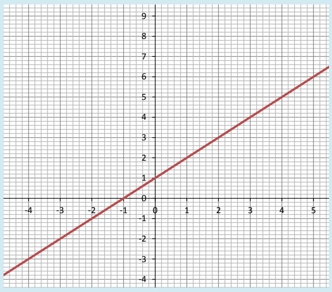
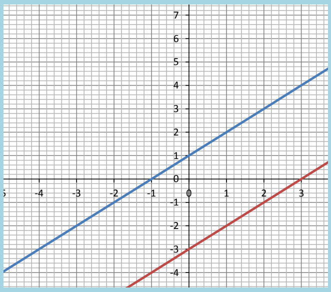
$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Luego, pueden representarse gráficamente ambas ecuaciones y determinar, si existe, el punto o los puntos de intersección de ambas gráficas.

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 2 \end{cases}$$



En general, si las condiciones las cumplen todos los números reales, es posible dibujar las rectas que representan ambas ecuaciones, pueden darse tres casos:

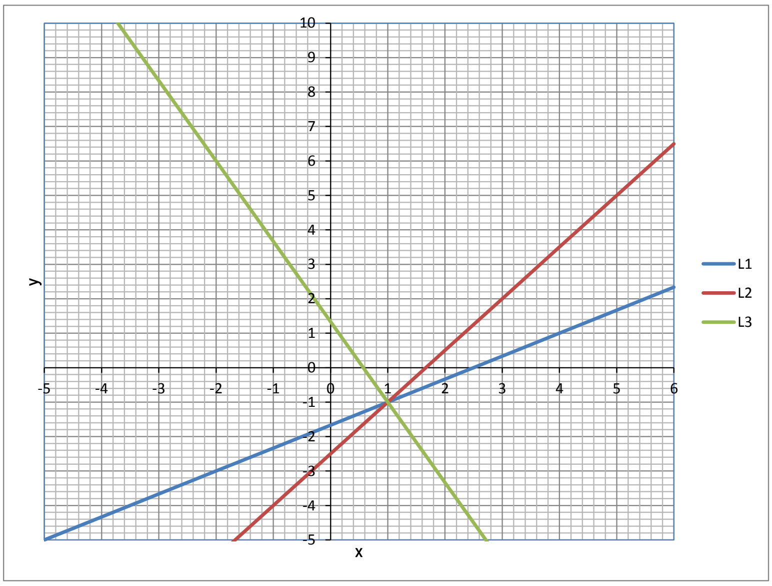
Denominación		Soluciones	Sistema	Gráfica
Compatible	Determinado	Única	$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 2 \end{cases}$	
	Indeterminado	Infinitas	$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = 2x + 2 \end{cases}$	
Incompatible		No tiene	$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$	

También es posible resolver sistemas de ecuaciones lineales formadas por más de dos ecuaciones.

Ejemplos.

1.

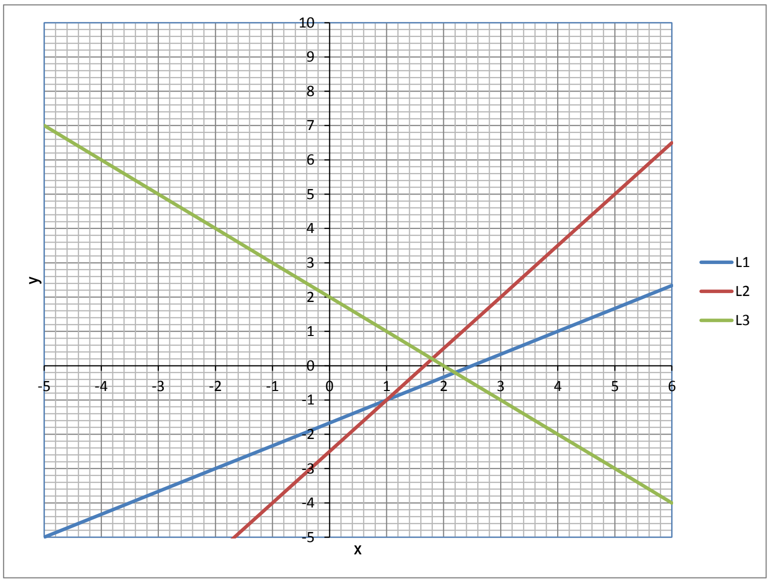
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \text{ (L1)} \\ 3x - 2y = 5 \text{ (L2)} \\ 7x + 3y = 4 \text{ (L3)} \end{cases}$$



La solución del sistema es x= 1, y= -1

2.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \text{ (L1)} \\ 3x - 2y = 5 \text{ (L2)} \\ x + y = 2 \text{ (L3)} \end{cases}$$



El sistema no tiene solución.

INECUACIONES

Una inecuación es una propuesta de desigualdad. Las relaciones numéricas que se expresan con los signos "<" y ">" y se llaman desigualdades y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman inecuaciones.

Ejemplo. $3x + 2 > 5$; la solución es $x > 1$.

Inecuaciones lineales con una variable

Son expresiones que pueden llevarse a alguna de las siguientes formas, donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

$ax + b < 0$ $\qquad$ $ax + b \leq 0$ $\qquad$ $ax + b > 0$ $\qquad$ $ax + b \geq 0$

Las desigualdades se resuelven del mismo modo que las ecuaciones, y solo cambia el sentido de la desigualdad en el caso que se multiplique o divida ambos miembros por un número negativo.

Ejemplo. $\qquad -3x + 2 < 50$

$-3x < 50 - 2$

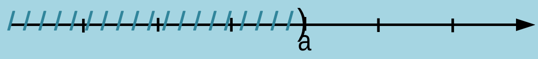
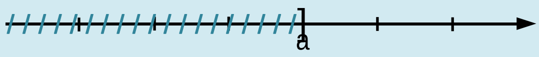
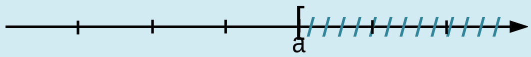
$-3x < 48$

$\frac{-3x}{-3} > \frac{48}{-3}$ Se invierte la desigualdad

$x > -16$

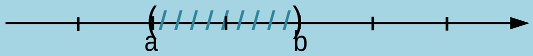
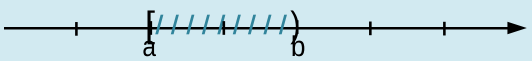
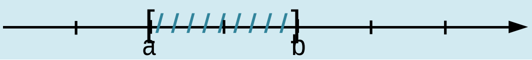
Resolución gráfica

Las soluciones de las inecuaciones pueden ser de la forma:

Solución de la inecuación	Solución en notación de intervalo	Representación gráfica de la solución
$x < a$	$(-\infty, a)$	
$x \leq a$	$(-\infty, a]$	
$x > a$	$(a; \infty)$	
$x \geq a$	$[a; \infty)$	

Sistema de inecuaciones lineales

Calcular las soluciones comunes a dos o más inecuaciones es resolver el sistema de inecuaciones formado por ellas.

Solución del sistema de inecuaciones	Solución en notación de intervalo	Representación gráfica de la solución
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	

Ejemplos.

1. $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

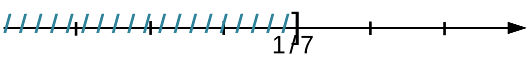
   $-5x + 2 \geq 2x + 1$

   $2 - 1 \geq 2x + 5x$

   $1 \geq 7x$

   $\frac{1}{7} \geq x$

   $S = \left(-\infty, \frac{1}{7}\right]$



2. $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

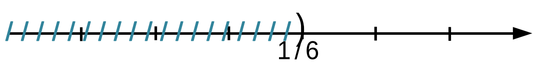
   $3x - 3 + 4 < -3x + 2$

   $3x + 3x < 2 - 1$

   $6x < 1$

   $x < \frac{1}{6}$

   $S = \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$



3. $2x + 1 < 2(4 + x)$

$2x + 1 < 8 + 2x$
$1 < 8$
$S = \mathbb{R}$

4. $-3x - 5 \geq \frac{1}{2}(7 - 6x)$

$-3x - 5 \geq \frac{7}{2} - 3x$

$-5 \geq \frac{7}{2}$

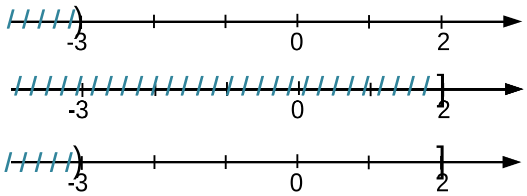
$S = \emptyset$ La desigualdad no se cumple nunca.

5. $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{cases}$

$x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$ $S_1 = (-\infty, -3)$

$5 - 2x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$ $S_2 = (-\infty, 2]$

$S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, -3)$

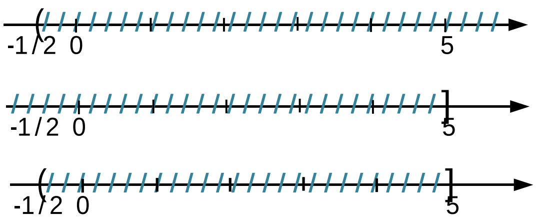


6. $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ $S_1 = (-\frac{1}{2}, \infty)$

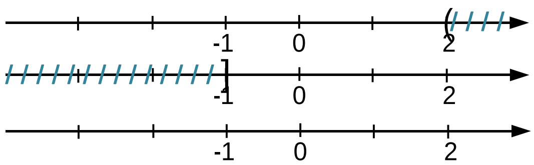
$5 - x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$ $S_2 = (-\infty, 5]$

$S = S_1 \cap S_2 = (-\frac{1}{2}, 5)$



7. $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$

$3x - 6 > 6 \Rightarrow x > 2$ $S_1 = (2, \infty)$
$x + 1 \leq -1$ $S_2 = (-\infty, -1]$
$S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$



8. $-\frac{7}{x} > 5$

Este tipo de ejercicio se puede resolver aplicando dos métodos:

- Por sistema de ecuaciones, tal como se vio en los ejemplos anteriores

$-\frac{7}{x} > 5$

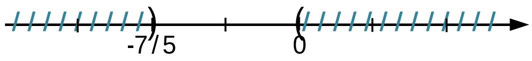
$-\frac{7}{x} - 5 > 0$

$$\frac{-7-5x}{x} > 0$$

El signo de este cociente depende del signo de los factores, y es por ello que se deberán plantear dos sistemas de ecuaciones.

1) $\begin{cases} -7-5x > 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{5} \\ x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$

$S = \emptyset$



2) $-7-5x < 0 \Rightarrow x > -\frac{7}{5}$

$x < 0 \Rightarrow x < 0$

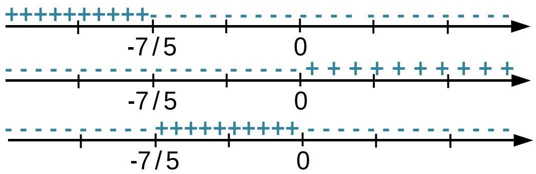
$S = S_1 \cup S_2 = (-\frac{7}{5}, 0)$

- Por regla de los signos

Signo $(-7-5x)$

Signo (x)

Signo $(-7-5x)(x)$



$S = (-\frac{7}{5}, 0)$

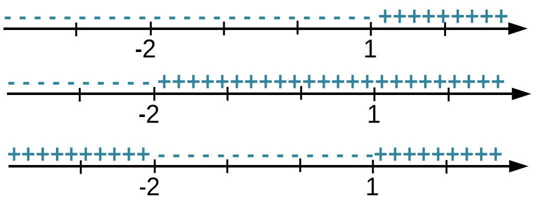
9. $(x-1)(x+2) \leq 0$

El signo del producto depende del signo de los factores

Signo $(x - 1)$

Signo $(x + 2)$

Signo $(x - 1)(x + 2)$



$S = [-2, 1]$

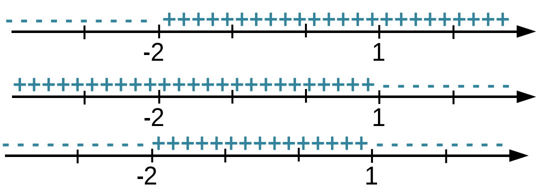
10. $\frac{x+2}{1-x} \leq 0$

El signo del cociente depende del signo de los factores. Los números -2 y 1 son los puntos donde los factores cambian de signo. Además, hay que tener en cuenta que $x \neq 1$ porque este valor anula al denominador.

Signo $(x+2)$

Signo $(1-x)$

Signo $\frac{x+2}{1-x}$



$S = (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$

Una identidad es una igualdad que se cumple para cualquier valor de las incógnitas.

Ejemplos.

$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

PROPORCIONALIDAD

Razón

Razón es el cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí, expresado como fracción. $\frac{a}{b}\begin{matrix}\rightarrow \text{Antecedente}\\ \rightarrow \text{Consecuente}\end{matrix}$

Los términos de una razón se llaman: antecedente y consecuente. El antecedente es el dividendo y el consecuente es el divisor.

Diferencia entre razón y fracción

La razón en los lados de un rectángulo de 5 cm de altura y 10 cm de base es: $\frac{5}{10}$

No hay que confundir razón con fracción.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción, entonces a y b son números enteros con $b \neq 0$, mientras que en la razón $\frac{a}{b}$ los números a y b pueden ser decimales.

Proporción

Proporción es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a, d $\rightarrow$ extremos

b, c $\rightarrow$ medios

Constante de proporcionalidad

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

Propiedades de las proporciones

En una proporción del producto de los medios, es igual al producto de los extremos.

a. d = b.c

Ejemplo.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \quad 2.10=5.4$$

En una proporción o en una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Si en una proporción cambian entre sí los medios o extremos la proporción no varía.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Cuarta proporcional. Es uno, cualquiera de los términos de una proporción. Para calcularlo se divide por el opuesto, el producto de los otros dos términos.

Ejemplos.

1. $\frac{2}{x} = \frac{4}{10} \quad x= \frac{2.10}{4} \quad x=5$
2. $\frac{x}{5} = \frac{4}{10} \quad x= \frac{5.4}{10} \quad x=2$

Medio proporcional. Una proporción es continua si tiene los dos medios iguales. Para calcular el medio proporcional de una proporción continua se extrae la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Ejemplo. $\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \quad x^2=3.12 \quad x= \pm\sqrt{36} \quad x= \pm 6$

Tercero proporcional. En una proporción continua, se denomina tercero proporcional a cada uno de los términos desiguales. Es igual al cuadrado de los términos iguales, dividido por el término desigual.

Ejemplo. $\frac{x}{6} = \frac{6}{12}$ $x = \frac{6^2}{12} = 3$

MÓDULO 3. FUNCIONES.

FUNCIONES

Se dice que y es función de x, cuando a cada valor de x le corresponde un valor de y. La expresión y= f (x) se lee "y es función de x". La variable x se llama variable **independiente**, la variable y se llama **dependiente**.

En una función, a cada valor de x le corresponde un único valor de y (condición de unicidad). Los valores de x para los cuales la función está definida constituyen su conjunto de existencia (llamado también campo de variación o de definición).

Formas de expresar una función

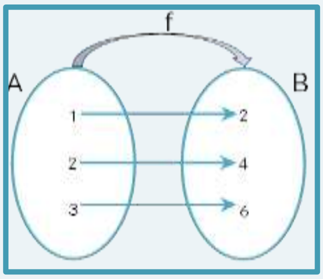


Diagrama de Venn

$y = f(x) = 2x$

Función analítica

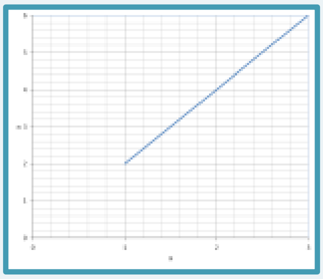
$f = \{(1;2), (2;4), (3;6)\}$

$f = \{(x;y) \ / \ y = 2x\}$

Notación de conjuntos

x	y
1	2
2	4
3	6

Forma tabular



Representación gráfica

Sea $f: A \to B \ / \ y = f(x)$

La función f relaciona los elementos del conjunto A (conjunto de partida) con los elementos del conjunto B (conjunto de llegadas).

Dominio. Es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente "x" y se simboliza D_f.

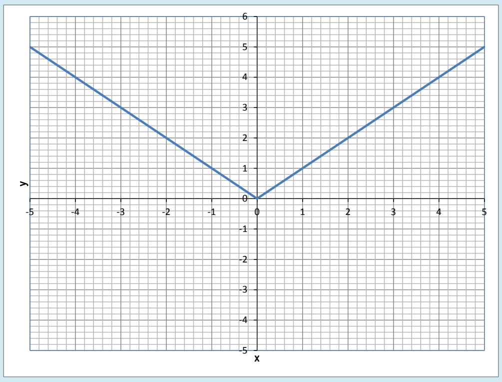
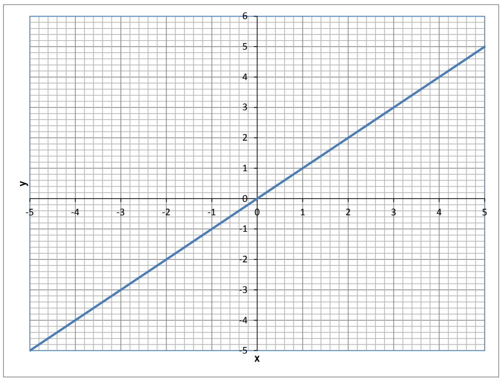
Codominio. Codominio de f: es el conjunto que contiene a todos los valores que puede tomar una función.

Imagen. Cada elemento "y" perteneciente al conjunto de llegada que está asociado a un elemento "x" del dominio de f se llama imagen de x y se escribe "f(x)".

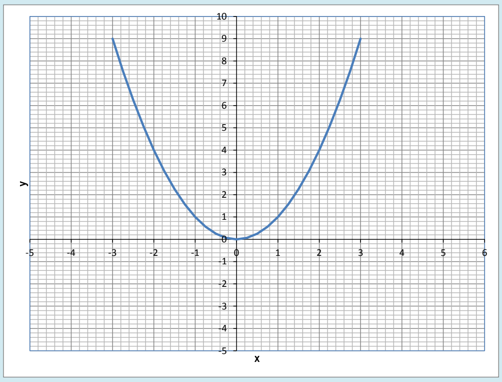
Se simboliza: $Im_f = \{y \in B / \exists\, x \in A / f(x) = y\}$

Características globales de las funciones

Una función es par cuando f(x)=f(-x); resulta un gráfico simétrico respecto del eje y. Una función es impar cuando f(x)= -f(x).

Ejemplo	Simetría	Gráfico
f(x)= ∣x∣ es par	La gráfica de la función es simétrica respecto del eje y	
f(x)= x es impar	La gráfica de la función es simétrica respecto del origen	

Una función es creciente cuando f(a) ≤ f (b). Una función es decreciente cuando f (a) ≥ f (b), siempre a < b.

Ejemplo	Simetría	Gráfico
f(x)= y = x^2	En el intervalo (-∞, 0) la función f(x) es decreciente, mientras que en el intervalo (0, ∞) f(x) es creciente.	

Una función es estrictamente **creciente** cuando f(a) < f(b), siempre que a < b. Una función es estrictamente **decreciente** cuando f(a) > f(b), siempre que a < b.

Una función es **inyectiva** si para cada valor de x existe un valor diferente de y.

Ejemplos. f(x) = x+1→ función inyectiva

f(x) = 4x → función inyectiva

f(x)= x^2 no es inyectiva, porque es par (hay valores de y que se repiten para diferentes valores de x).

Una función es **sobreyectiva** si todo elemento del codominio de la función es imagen de al menos de un elemento del dominio.

Ejemplos. f(x) = 2x → es sobreyectiva, ya que todo número real y del codominio es imagen de y / 2.

f(x) = x^2 → no es sobreyectiva.

f(x) = x^3 → es sobreyectiva.

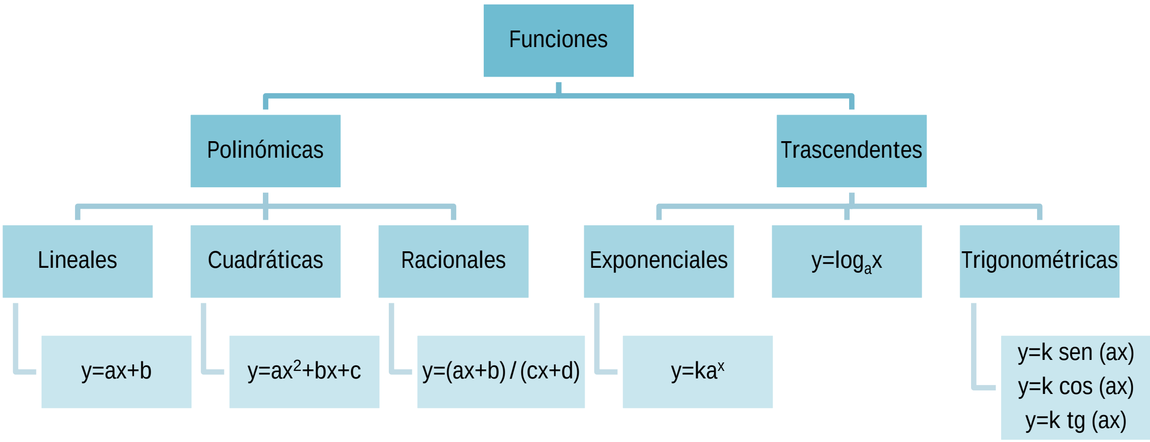
Una función es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplos. f(x) = 2^x→ función biyectiva.

f(x) = x^5 → función biyectiva.

f(x) = x → función biyectiva.

Clasificación de las funciones



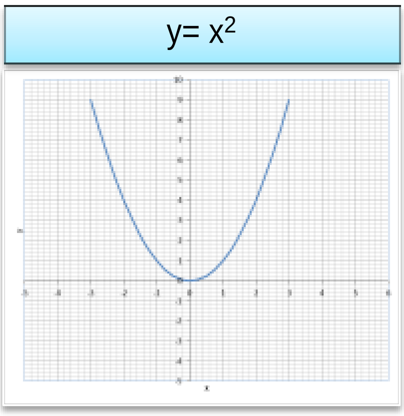
Funciones polinómicas

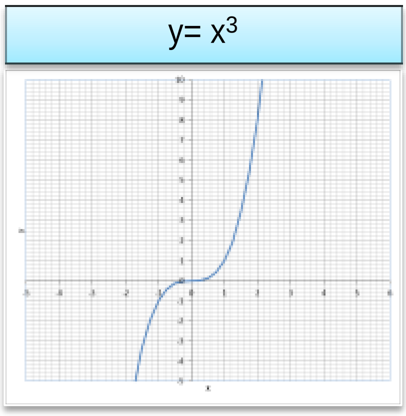
Una función polinómica tiene la forma:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a \in R$ y $a_n \neq 0$

Una función es potencial cuando $f(x)= x^n$, con $n \in N$ (caso particular de las funciones polinómicas).

1. Si n=1, f(x)=x (función identidad).
2. Si n=2, $f(x)=x^2$(función cuadrática).
3. Si n=3, $f(x)=x^3$(función cúbica).

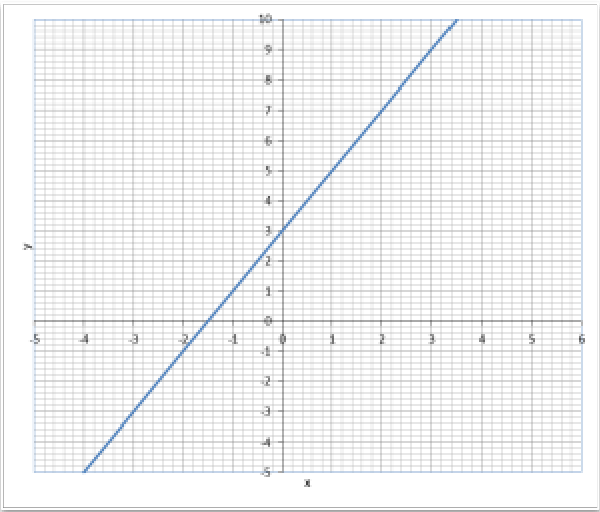

$y= x^2$


$y= x^3$

FUNCIÓN LINEAL

La función lineal es de la forma y= ax + b donde $a \wedge b \in R$, y $a \neq 0$. El dominio de la función lineal es el conjunto R. La gráfica es una recta.

El parámetro a es la pendiente de dicha recta, y su valor indica la inclinación con respecto al eje x. Si a > 0 la recta es creciente, si a < 0 es decreciente. El parámetro b es la ordenada al origen, y señala el valor en que la recta corta al eje y (o sea, el par ordenado (0,b)).



y= 2x + 3

a=2

b=3

La expresión y= ax + b se denomina ecuación explícita de la recta en el plano.

Toda recta en el plano puede expresarse mediante una ecuación lineal, mediante dos variables: Ax + By + C = 0 con A y B, no simultáneamente nulos. Dicha expresión se denomina ecuación implícita de la recta en el plano.

Una ecuación lineal de la forma Ax + By + C = 0, con $B \neq 0$, siempre es posible escribirla con la fórmula de una función lineal y= ax + b, donde $a= -\frac{A}{B}$ y $b= -\frac{C}{B}$.

Ejemplos.

$3x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y= -\frac{3}{2}x - 2$

$3x + 2y = 0 \Leftrightarrow y= -\frac{3}{2}x$

$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow y= - 2$

Las rectas verticales (paralelas al eje de ordenadas) no pueden expresarse mediante una ecuación explícita utilizando la noción de pendiente como cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Para conocer la raíz (o cero) de la ecuación lineal, se iguala a 0 y se despeja x.

$$x_0= \frac{0-b}{a}$$

Si se tienen dos puntos que pertenezcan a una recta, se puede conocer su ecuación calculando a y b a partir de los pares ordenados (x_1, y_1) (x_2, y_2). La pendiente se averigua reemplazando los valores dados en:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con el valor de la pendiente y tomando uno de los puntos, se reemplaza en la ecuación $y_1 = ax_1 + b$ y se despeja b.

Ejemplo. Hallar la recta que pasa por los puntos (1,3) y (2,6).

- En primer lugar se calcula la pendiente:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-1} = 3$$

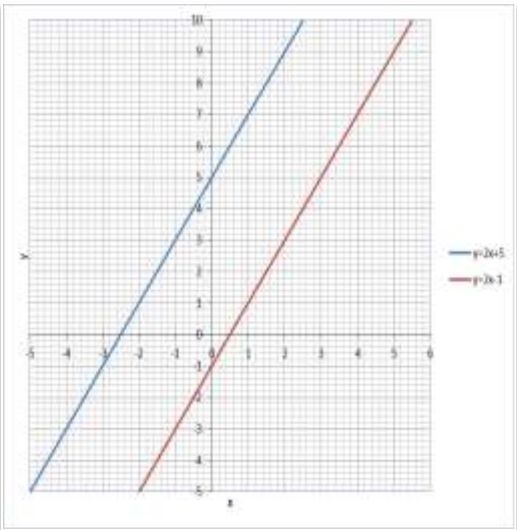
- Luego se reemplazan los valores de a y de uno de los puntos en la ecuación general:

$$6 = 3.2 + b$$

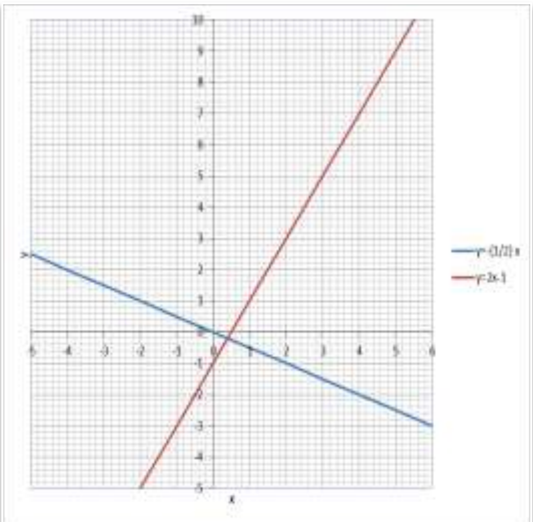
- Se despeja, obteniendo b=0 y la ecuación, que es y=3x.

Dos rectas son paralelas cuando su pendiente es la misma. Por otro lado, dos rectas son perpendiculares cuando el producto de su pendiente es -1.

Rectas paralelas



Rectas perpendiculares



Cuando b=0, la ecuación y= ax representa una recta que pasa por el origen (0,0). Este tipo de función se llama **proporcionalidad**, ya que a= y / x es constante para cualquier par de puntos, (x,y). Esto es, x e y son proporcionales y su cociente es una constante (a) llamada relación de proporcionalidad.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Una ecuación de segundo grado con una incógnita, es una ecuación de la forma: $ax^2+bx+c = 0$ donde $a,b,c \in R$ y $a \neq 0$

Ejemplos. (El mayor exponente al que aparece elevada la incognita es dos)

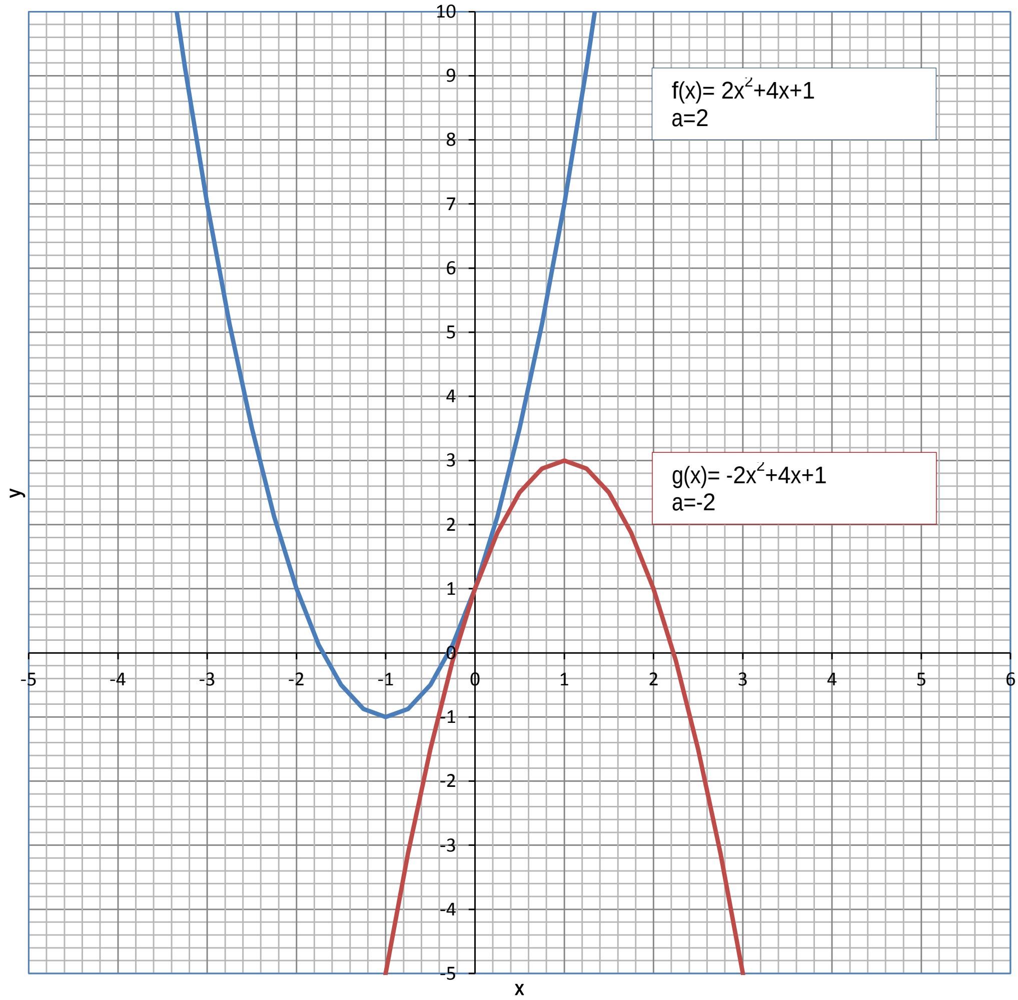
1. $x^2+16=0$
2. $x^2-7x-18=0$
3. $3x^2-48=0$

La ecuación puede ser completa $ax^2+bx+c = 0$ con $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$ o puede ser incompleta:

- $b\neq0$, $c=0$ del tipo $ax^2+bx = 0$
- $b=0$, $c\neq0$ del tipo $ax^2+c = 0$
- $b=0$, $c=0$ del tipo $ax^2= 0$

Definición función cuadrática

La función cuadrática tiene la forma $f(x)= ax^2+bx +c$, donde $a,b,c \in R$ y $a \neq 0$. El dominio de la función es R. La gráfica es una parábola, cuyo vértice (x_v, y_v) presenta un máximo si $a<0$ o un mínimo si $a>0$. La función es simétrica respecto de un eje paralelo al eje “y” que pasa por el vértice.



Expresión función cuadrática

Existen tres formas de expresar una función cuadrática:

1º. Polinómica.

2º. Canónica. Hace uso de los valores del vértice (x_v, y_v):
$f(x) = a(x-x_v)^2+f(x_v)$ donde $f(x_v)=y_v$

3º. Factorizada. Presenta los valores de las raíces:
$f(x)= a(x-x_1)\,(x-x_2)$

Las raíces o ceros se pueden hallar mediante la aplicación de la resolvente, o complementando cuadrados. El método más difundido es el de aplicación de la resolvente o método Bhaskara. La resolvente es:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El término (b^2 -4ac) se denomina discriminante y se simboliza mediante la letra griega delta mayúscula (Δ). Según el signo que tome el determinante, se obtienen las siguientes situaciones:

Si $\Delta > 0$, ambas raíces son reales y distintas.

Si Δ = 0, ambas raíces son reales e iguales.
Si Δ <0, las raíces son complejas conjugadas.

Otro método de resolución es el de completar cuadrados, consiste en transformar la ecuación cuadrática en el cuadrado de un binomio.
Procedimiento:

1º. Se iguala la ecuación a cero y se despeja a la derecha el término c.
2º. Se divide por 2 el coeficiente b y el resultado se eleva al cuadrado.
3º. El valor obtenido se suma a ambos lados de la igualdad.
4º. La expresión de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto, se lo expresa como un cuadrado de un binomio.
5º. Se aplica raíz cuadrada a ambos miembros, por lo que el valor de la derecha puede resultar tanto positivo como negativo.
6º. Se despeja x, obteniéndose los dos valores de las raíces.

Observación: En el primer paso debe dividirse cada término por el coeficiente a.

Ejemplo. Hallar las raíces de $x^2 + 8x + 12$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x^2 + 8x = -12$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = -12 + 16$$

$$(x+4)^2 = 4$$

$$(x+4) = \sqrt{4}$$

$$(x+4) = \pm 2$$

$$X_{1,2} = -4 \pm 2$$

La función inversa de f(x), denominada $f^{-1}(x)$, es aquella en la que el dominio de una es codominio de la otra, y viceversa.

Ejemplo.

Sean A = {0;1;2;3} y B={a;b;c;d}, y f{(0;a); (1;b); (2;c); (3;d)}.

La función inversa de f, es f^{-1}={(a; 0); (b;1); (c;2); (d;3)}

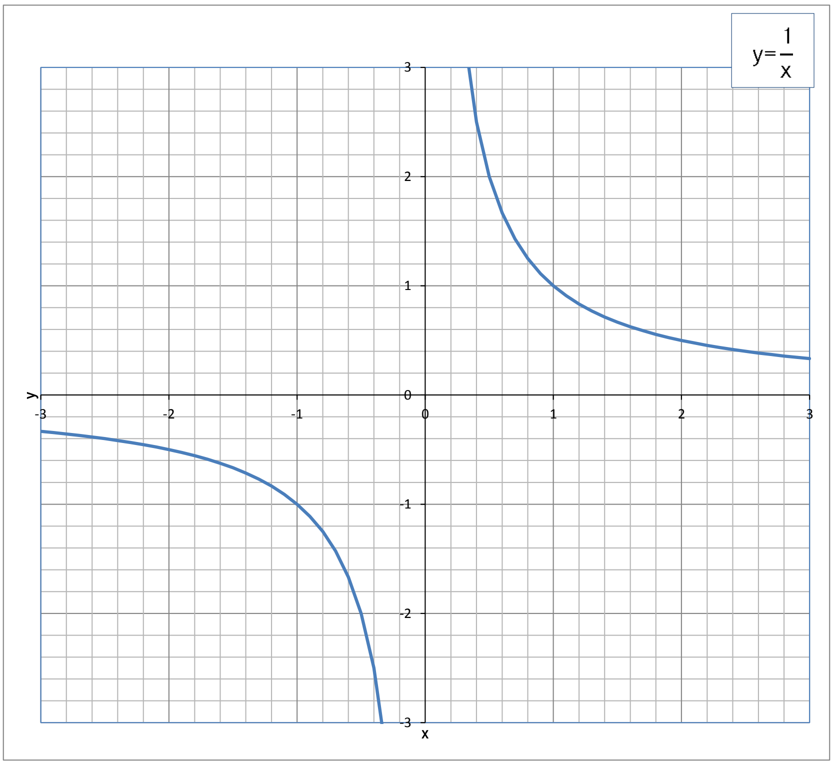
Resumiendo, podemos expresar la ecuación de una función cuadrática como muestra el siguiente cuadro:

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica o general	$y= 2x^2+bx+c$, $a\neq 0$	a, b, c (c: ordenada al origen)
Canónica	$y= a(x-x_v)^2+y_v$, $a\neq 0$	a, x_v, y_v ($V= (x_v, y_v)$ vértice)
Factorizada	$y= a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$	a, x_1, x_2 (x_1, x_2: raíces)

OTRAS FUNCIONES

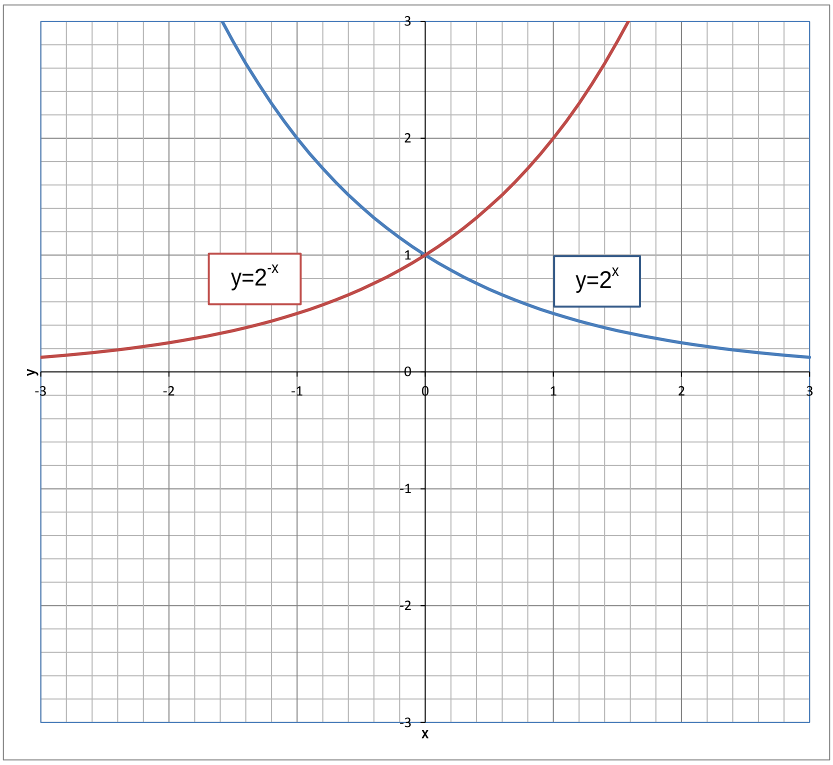
Función racional

La función es racional cuando f(x)= p(x) / q(x), siendo ambos polinomios y $q(x)\neq 0$. La recíproca es de la forma f(x)=1 / x (su gráfica es una hipérbola), la función homográfica es de la forma f(x)= ax+b / cx+d, $c\neq 0$



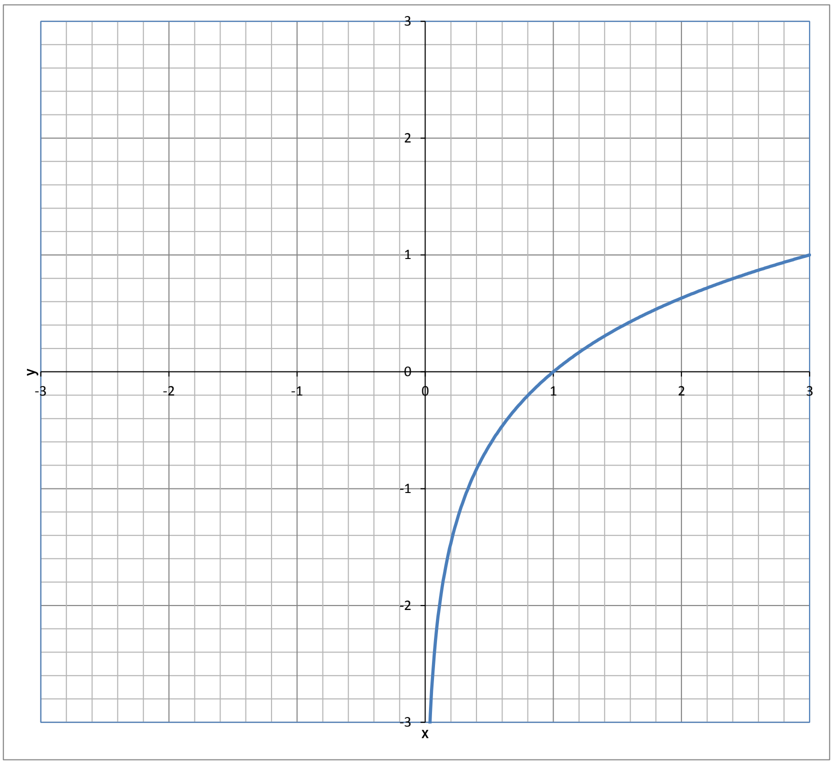
Función exponencial

Una función es exponencial cuando f (x)= a^x, siendo $a \in R$, $a>0$ y $a\neq 1$. La base de esta función es a.



Función logarítmica

La función logarítmica es la inversa de la exponencial, de modo tal que $\log_a x=y$ si sólo si $a\neq x$.

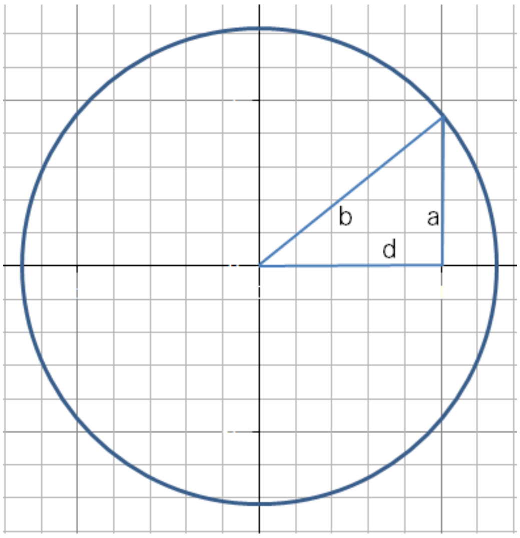


Función trigonométrica

Una función **periódica** es aquella cuyo comportamiento se repite cíclicamente a intervalos regulares. Las más conocidas son las funciones **trigonométricas**.

Sea una circunferencia de radio b de longitud 1 y centro en (0,0). Si el ángulo α formado por la hipotenusa y el eje positivo de las x está medido en radianes, se pueden definir distintas **funciones trigonométricas** de acuerdo a las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo que se forma.

$\text{sen}\alpha = a$	$\text{cosec}\alpha = 1/a$
$\cos\alpha = d$	$\sec\alpha = 1/d$
$\text{tg}\alpha = a/d$	$\text{cotg}\alpha = d/a$



El perímetro de la circunferencia es $2\pi r$ (que en grados equivale a 360º), y un **radián** es un arco de longitud igual a la del radio r, por lo tanto 360º= 2π radianes.

Las funciones trigonométricas son funciones **periódicas**, ya que el valor de la función se repite periódicamente; en este caso, cada 360º o 2π.

$$f(\alpha) = f(\alpha+2\pi)$$

El **signo** de la función depende del cuadrante en el que se ubica el ángulo buscado. Por ejemplo, senα es positivo en los cuadrantes I y II, y negativo en III y IV. El cosα es positivo en los cuadrantes I y IV, y la tg α en los cuadrantes I y III.

Observación: Cada cuadrante corresponde a 90º (o $\pi/2$) y se cuenta en sentido contrario a las agujas del reloj, comenzando en el eje positivo de las x.

Gráfico seno

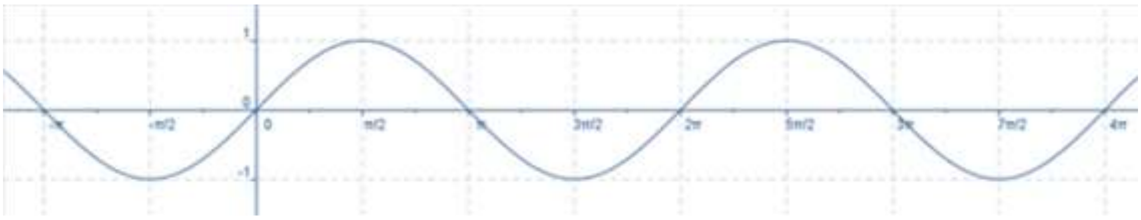


Gráfico coseno

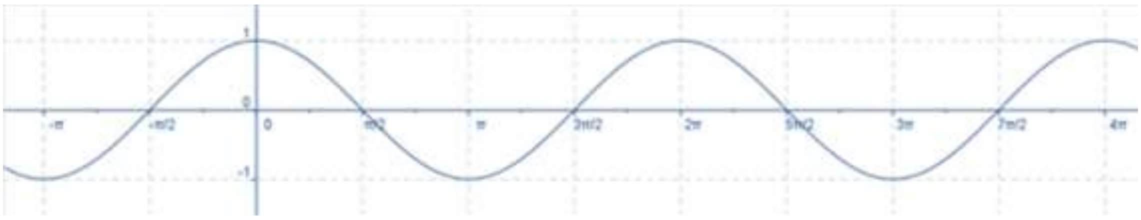


Gráfico tangente

Las funciones trigonométricas **inversas** permiten resolver ecuaciones del tipo senγ = 0,737. Para ello se aplica arcsen (0,737) y se averigua el valor de γ. Son las siguientes: arcsen γ, arccos γ, arctg γ, arccotg γ, arcsen γ, arccosec γ. Para ello se restringe el dominio de las mismas, ya que no son biyectivas. El dominio será entonces $[-\pi/2; \pi/2]$ para el arcsen, $[0; \pi]$ para el arccos, y $[-\pi/2; \pi/2]$ para la arctg.

ESTUDIO ANALÍTICO DE FUNCIONES

El alcance del estudio analítico de una función para este curso, consistirá en determinar:

- Conjunto dominio.
- Conjunto imagen.
- Intersecciones con los ejes coordenados.
- Conjunto de positividad y negatividad.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Toda esta información nos permite hacer una representación gráfica de la función muy aproximada a la real.

Ejemplos.

1. y= 2x + 3

El dominio de una función es el conjunto de valores donde la función está definida. Se deben hallar los valores de x donde la función no existe. En el caso de la función analizada, no existen valores de x para los cuales la función no esté definida, por lo tanto: Df=R.

El conjunto imagen está formado por todos los elementos "y" que está asociado a un elemento "x" del dominio de la función, donde y = f(x) Para la función en estudio, Im f = R.

Para hallar los puntos de corte de una función y=f(x) con el eje de abscisas, basta resolver la ecuación f(x)=0. Estos puntos se denominan también raíces.

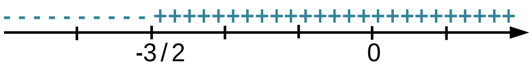
$$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \qquad A=(-\frac{3}{2}, 0)$$

El punto de corte de una función con el eje de ordenadas existe, es (0,f(0)), por lo tanto hay que hacer x= 0 y despejar el valor de y.

$$y= 2\,(0) + 3 \Rightarrow y=3 \qquad B= (0,3)$$

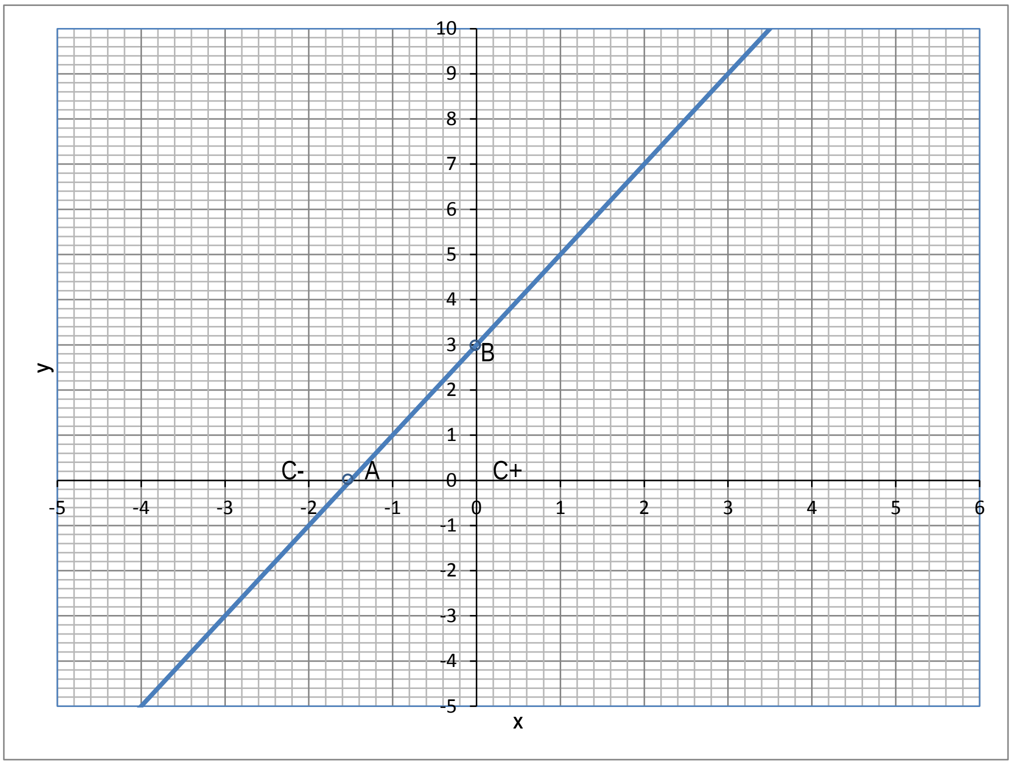
Las raíces reales de una función, si es que existen, nos permitirán determinar los intervalos en los cuales la función es positiva y los intervalos en los cuales es negativa. Los intervalos de positividad (C +) de una función f(x) son los intervalos de x en los cuales la función es positiva, es decir, donde f(x)>0. Los intervalos de negatividad (C -) de una función f(x) son los intervalos de x en los cuales la función es negativa, es decir, donde f(x)<0.

Signo (2x+3)



C- = (-∞; -3/2) C+= (-3/2, ∞)

Como se vio al estudiar función lineal, basta evaluar el signo de la pendiente. Para este caso, a= 2 > 0, entonces, la función es creciente en todo su dominio.



2. $y= -\frac{5}{4}(x+6)(x+2)$

Al ser una función polinómica, no existen valores de x para los cuales la función no esté definida, por lo tanto Df = R.

Al estar expresada en forma factorizada, el valor de las raíces surge fácilmente de la misma expresión, ya que son los valores de x que hacen igual a cero cada uno de los factores:

$$x + 6=0, \text{ entonces } x_1 = -6$$

$$x + 2= 0, \text{ con } x2= -2$$

Al ser una función cuadrática de coeficiente principal negativo (a= -5/4), se sabe que el vértice es el máximo para la función. Por ser una función simétrica con raíces reales, el valor de la abscisa del vértice se determina como:

$$x_v= \frac{(x_1+x_2)}{2} = \frac{-6 -2}{2} = -4$$

$$y_v = f(x_v)= 5$$

Vértice (V)= (-4,5)

Se puede ahora determinar la imagen de la función.

$$\text{Im } f = (-\infty,5)$$

La intersección con el eje y se evalúa en x=0, entonces.

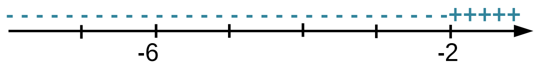
$$y = -\frac{5}{4}(0+6)(0+2) = -15$$

B= (0,-15)

Signo $(-\frac{5}{4})$

Signo (x+6)

Signo (x+2)



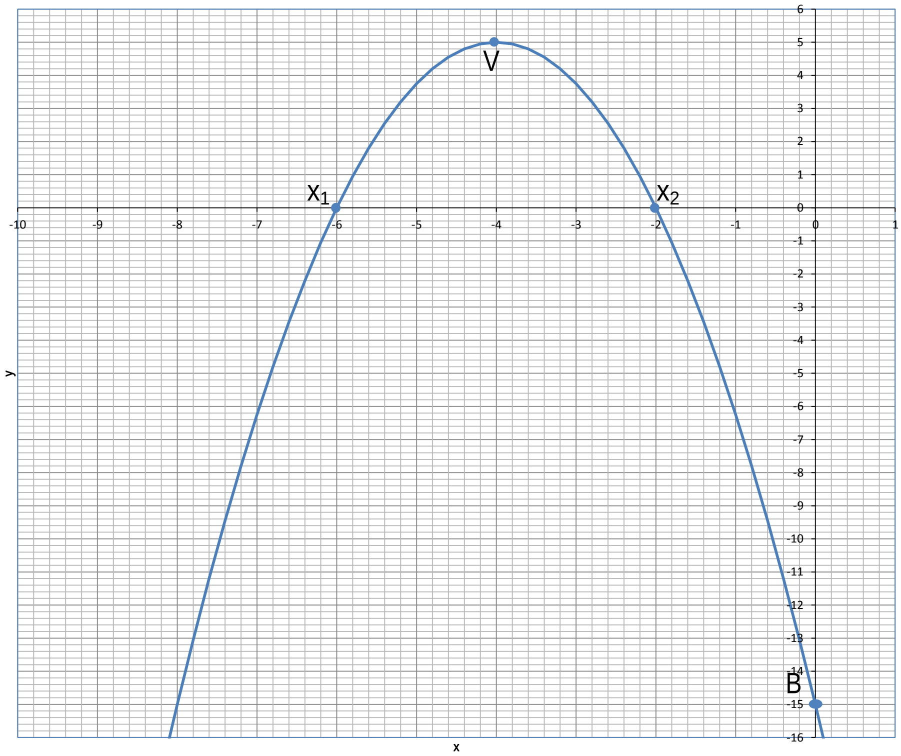
Signo $(-\frac{5}{4}(x+6)(x+2))$

C- = (-∞,-6) U (-2, ∞)

C+ = (-6, -2)

Intervalo de crecimiento = (-∞; -4)

Intervalo de decrecimiento = (-4; ∞)



MÓDULO 4. GEOMETRÍA.

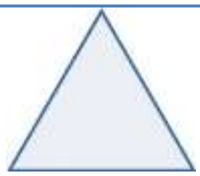
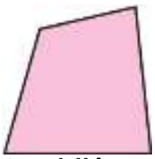
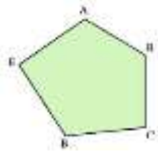
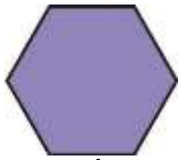
Nociones básicas de geometría

La **geometría** (del griego *geo* tierra y *metría* medida), es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, polinomios (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.).

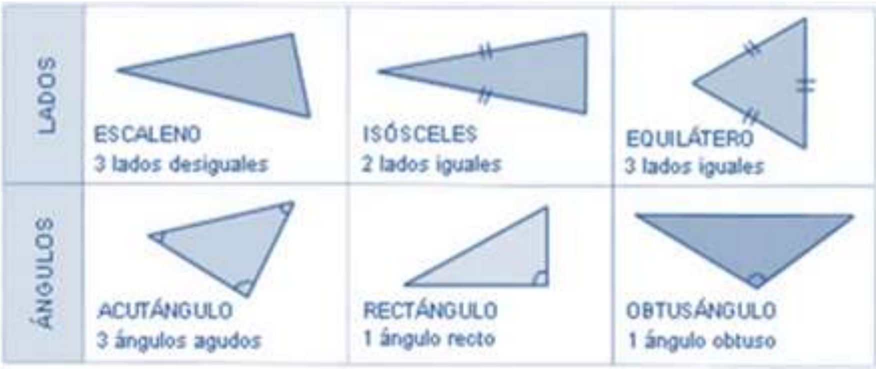
Euclides (en griego Eukleides) fue un matemático y geómetra griego (325 a.C-265 a. C.). Se le conoce como **"El Padre de la Geometría".** En matemáticas, **el Espacio euclídeo** es un tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría. La recta real, el plano euclídeo y el espacio tridimensional de la geometría euclidiana son casos especiales de espacios euclídeos de dimensiones 1, 2 y 3 respectivamente.

Figura geométrica

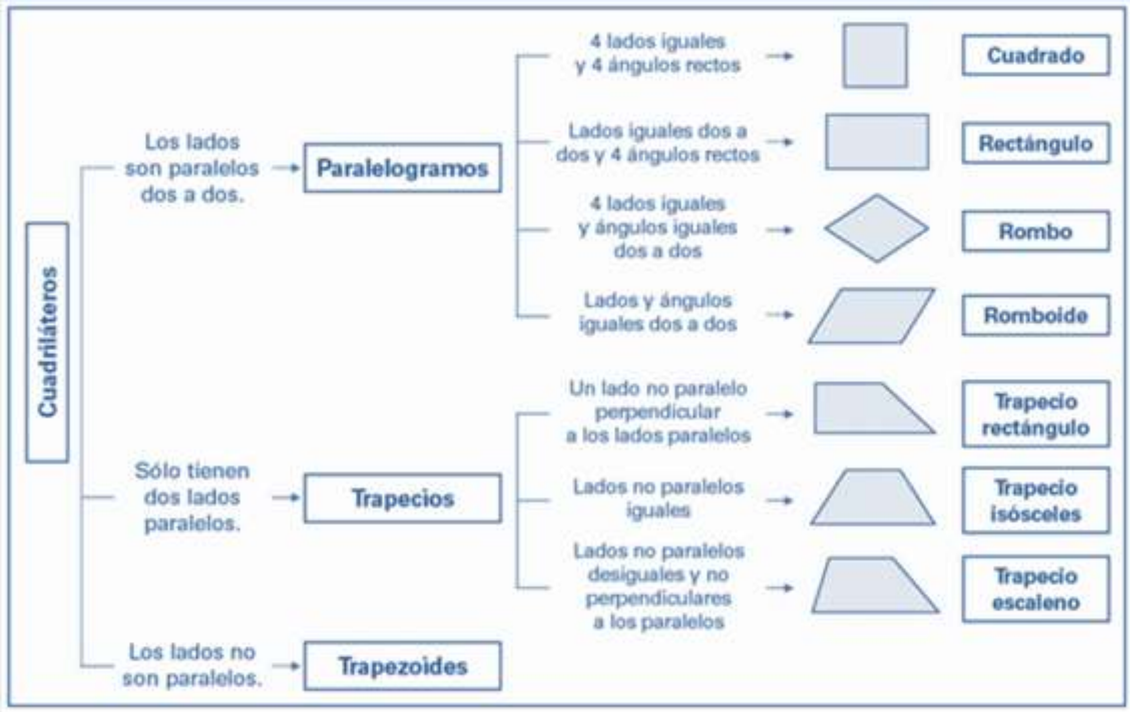
Una **figura geométrica** es un conjunto no vacío cuyos elementos son puntos. Las figuras geométricas son el objeto de estudio de la geometría.

 **Triángulo**	 **Cuadrilátero**	 **Pentágono**	 **Hexágono**
3 lados	4 lados	5 lados	6 lados
3 vértices	4 vértices	4 vértices	6 vértices

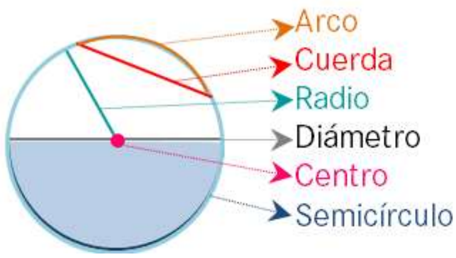
Clasificación de triángulos



Clasificación de cuadriláteros



Elementos de la circunferencia

Circunferencia	Círculo
Es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia del centro.	Es una figura plana formada por una circunferencia y su interior.
	

Perímetro o Longitud

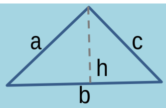
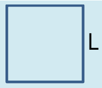
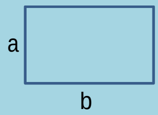
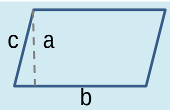
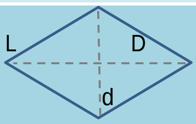
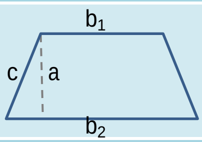
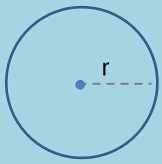
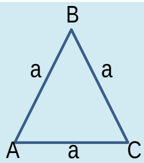
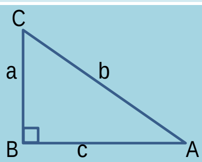
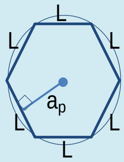
El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

En una circunferencia el perímetro se llama **longitud**. La longitud de una circunferencia es L= 2. π.r, donde r es el radio de la circunferencia y π= 3,14.

Área

Concepto de área: El **área** de una figura, es la cantidad de superficie que encierra sus límites.

La **superficie** es el conjunto de puntos que encierra su contorno. **Área** es el valor numérico que mide cuánta superficie.

Figura		Perímetro	Área
Triángulo		$P=a+b+c$	$A=\frac{b.h}{2}$
Cuadrado		$P=4.L$	$A=L^2$
Rectángulo		$P= 2.a + 2.b$	$A=a.b$
Paralelogramo		$P= 2.b + 2.c$	$A=a.b$
Rombo		$P=4.L$	$A=\frac{D.d}{2}$
Trapecio isósceles		$P= b_1+b_2+2.c$	$A=\frac{a.(b_1+b_2)}{2}$
Circunferencia Círculo		Longitud de la circunferencia $L= 2.\pi.r$	$A= \pi.r^2$
Triángulo equilátero		$P=3.a$	$A= \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$
Triangulo rectángulo		$P= a+b+c$	$A= \frac{a.c}{2}$
Polígono regular		$P= N.L$ Siendo N el número de lados.	$A= \frac{P.a_p}{2}$

Los cuerpos geométricos

Se denominan cuerpos geométricos a aquellos elementos que existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente, están compuestos por figuras geométricas y ocupan un volumen en el espacio representando las tres dimensiones de alto, ancho y largo.

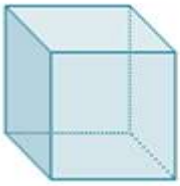
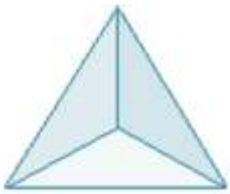
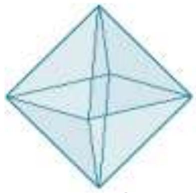
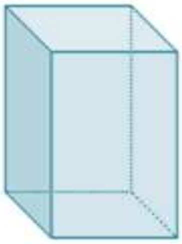
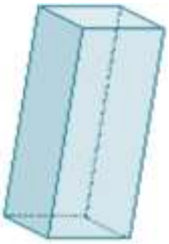
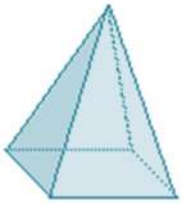
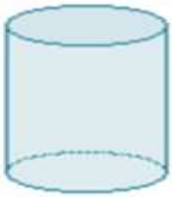
Clasificación de los cuerpos geométricos

1. **Los poliedros** (del griego polys, "muchas" y edros, "base" "cara") **o cuerpos planos**, compuestos exclusivamente por figuras geométricas planas, por ejemplo el cubo.

2. **Los cuerpos redondos** que son compuestos total o parcialmente por figuras geométricas curvas, por ejemplo el cilindro, la esfera o el cono.

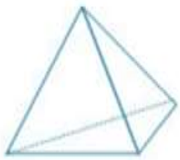
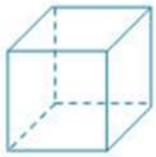
Representación gráfica

Para la representación gráfica de los cuerpos geométricos en tres dimensiones, se recurre a una técnica de dibujo, la perspectiva.

Poliedros regulares	 Cubo	 Tetraedro	 Octaedro
Poliedros irregulares	 Prisma de base cuadrada	 Prisma inclinado	 Pirámide racta
Cuerpos redondos	 Cilindro	 Cono	 Semiesfera

Observación: Las líneas que corresponden a los lados comunes de los diversos planos que componen los cuerpos geométricos, se denominan **aristas**. Los poliedros regulares presentan todas las caras iguales. Los poliedros irregulares tienen caras que comprenden más de un tipo de figuras planas, no se trata que todas ellas sean distintas (por ejemplo una piedra preciosa).

Resumen superficies poliedros

Figura	Esquema	Número de caras	Área
Tetraedro		4 caras, triángulos equiláteros	A= $a^2.\sqrt{3}$
Octaedro		8 caras, triángulos equiláteros	A= $2.a^2.\sqrt{3}$
Cubo		6 caras, cuadrados	A= $6.a^2$
Dodecaedro		12 caras, pentágonos regulares	A=30.a.apotema
Icosaedro		20 caras, triángulos equiláteros	A=$5.a^2.\sqrt{3}$

Volumen de los cuerpos geométricos

Una magnitud física es una propiedad o cualidad medible de un sistema físico, es decir, que se le pueden asignar distintos valores como resultado de una medición o una relación de medidas. Pueden ser clasificadas de acuerdo a:

- Su expresión matemática, en magnitudes escalares, vectoriales y tensoriales.
- Su actividad, en magnitudes extensivas e intensivas.

El **volumen** es una magnitud escalar definida como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio. Las magnitudes escalares son aquellas expresadas por un número y las unidades utilizadas para su medida.

La **capacidad** y el **volumen** son términos equivalentes, pero no iguales. La capacidad se refiere al volumen de espacio vacío suficiente para contener a otras cosas.

La unidad de medida de volumen en el Sistema Internacional de Unidades es el metro cúbico. Para medir la capacidad se utiliza el litro. Ambas se relacionan por la equivalencia: $1dm^3$= 1litro= $0,001m^3$=$1000cm^3$.

Unidades de volumen:

Múltiplos	Submúltiplos
• Kilómetro cúbico= $10^9 m^3$	Decímetro cúbico= $10^{-3} m^3$
• Hectómetro cúbico= $10^6 m^3$	Centímetro cúbico= $10^{-6} m^3$
• Decámetro cúbico= $10^3 m^3$	Milímetro cúbico= $10^{-9} m^3$.

Algunos cuerpos geométricos.

Cilindro: Es una superficie de las denominadas cuadráticas formada por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, que puede ser cerrada o abierta, denominada directriz del cilindro.

Esfera: Es una superficie de revolución o el conjunto de los puntos del espacio cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.

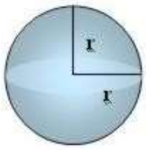
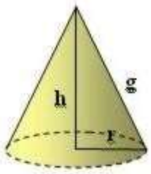
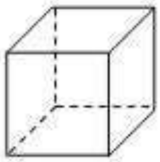
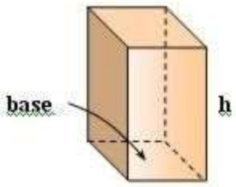
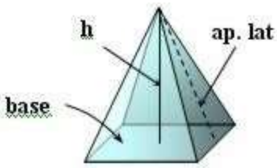
Cono: Es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina base y al punto donde confluyen las generatrices se llama vértice.

Cubo o hexaedro regular: Es un poliedro de seis caras planas, cuadradas congruentes que encierran un volumen finito.

Prisma: Es un poliedro que consta de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos.

Pirámide: Es un poliedro limitado por una base, que es un polígono con una cara; y por caras, que son triángulos coincidentes en un punto denominado ápice o cúspide también llamado vértice. Tantos vértices como el número de polígonos que lo limitan.

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2.\,\pi.r\,(h+r)$	$V = \pi.r^2.h$
Esfera		$A_{total} = 4.\,\pi.r^2$	$V = \frac{4}{3}\,\pi.r^3$
Cono		$A_{total} = \pi.r^2 + \pi.r.g$	$V = \frac{\pi.\,r^2.\,h}{3}$
Cubo		$A = 6.a^2$	$V = a^3$
Prisma		A= (perim base.h) +2. Área base	V= área base. h
Pirámide		$A = \frac{\text{peri base . ap lat}}{2} + \text{área base}$	$V = \frac{\text{área base . h}}{3}$

MÓDULO 5. TRIGONOMETRÍA.

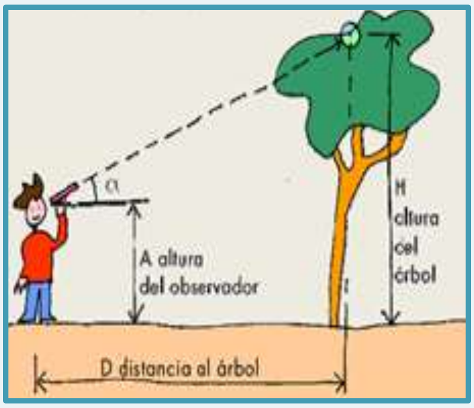
Trigonometría

La palabra trigonometría proviene del griego Tri (tres) gono (ángulo) metría: medida.

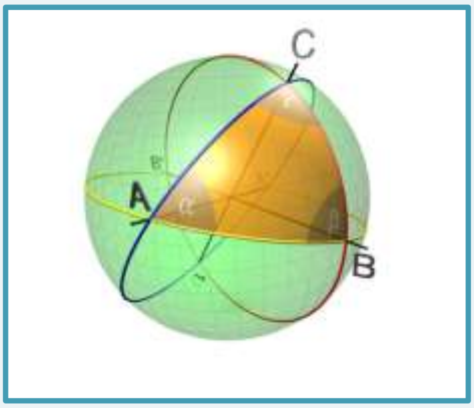
El núcleo central de contenidos del presente módulo se enfoca en la revisión de conceptos básicos de trigonometría, relaciones trigonométricas, resolución de triángulos rectángulos y la correspondencia entre dos sistemas de medición de ángulos: sexagesimal y radial o circular.

Desde sus orígenes, la **trigonometría** estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, como así también las propiedades y las aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos.

Su estudio abarca:



Trigonometría Plana: triángulos en el plano



Trigonometría Esférica: triángulos en la esfera

Sistemas de medición de ángulos

Los sistemas de medición de ángulos más usados son **Sexagesimal** y **Circular**.

Sistema Sexagesimal: La unidad es el grado sexagesimal, que es la 180ava parte de un ángulo llano giro. Los submúltiplos **minutos** y **segundos** que a su vez son 60avas partes de su anterior. Ej. 30° 20' 12”

Ángulo	Grados
Recto	90°
Llano	180°
Giro	360°

Medidas de ángulos			Equivalencias
Unidad	Grado	$1° = \frac{1 \text{ llano}}{180}$	$1° = 60´ = 3600´´$
Submúltiplo	Minutos	$1´ = \frac{1°}{60}$	$1´ = (\frac{1}{60}) = 60´´$
	Segundos	$1´´ = \frac{1´}{60}$	$1´´ = \left(\frac{1}{3600}\right) = (\frac{1}{60})$

Ejemplos. *Conversión de un ángulo en grados minutos y segundos a grados y viceversa*

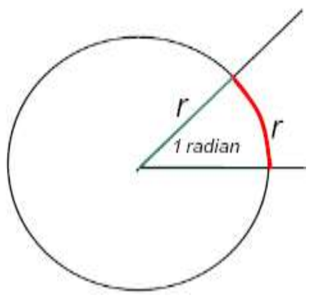
1. Expresar el ángulo α = 30° 20´ 40´´ en grados:

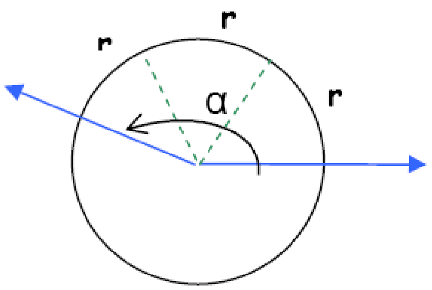
$$\alpha = 30° \ 20' \ 40'' = 30° + \left(\frac{20}{60}\right)° + \left(\frac{40}{3600}\right)° = 30{,}34°$$

2. Expresar el ángulo $\theta = 18{,}29°$ en grados, minutos y segundos

Separamos la parte entera de la decimal de 18,29°	$18{,}29° = 18° + 0{,}29°$
Usando proporcionalidad directa calculamos cuantos minutos son $0{,}29°$	1°________ 60' 0,29°________ x = 0.29.60= 17,4''
Separamos la parte entera de la decimal de 17,4''	17,4'' = 17' + 0,4'
Usando proporcionalidad directa calculamos cuantos segundos son 0,4´. Así obtenemos: $18{,}29° = 18° \ 17' \ 24''$	1'__________60'' 0,4'__________ $x = 0{,}4.60 = 24''$

<u>Sistema Circular o radial:</u> La unidad de medida es el radian. Se define al ángulo de radian como el ángulo que determina un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.





α = 3 rad.

Para medir cualquier otro ángulo, usando como unidad de medida el radian, se debe contar la cantidad de veces que el arco determinado en la circunferencia lo contiene al radio de la circunferencia.

Ejemplos. $\beta = \frac{\pi}{3}$ rad. ó $\beta = \frac{\pi}{3}$

Relación entre arco, radio y ángulo

En una circunferencia de radio "r", la longitud "s" de un arco que subtiende un ángulo central de α radianes es: $S = r.\ \alpha$ ó $\alpha = \frac{S}{r}$

Relaciones de equivalencias entre los dos sistemas

De la definición de radian y de grado se desprende que:

1 giro = 2. π radian = 360° 1 llano = π radian = 180° 1 recto = $\frac{\pi}{2}$ radian= 90°

Para realizar equivalencias entre los sistemas usamos proporcionalidad directa:

Sistema Sexagesimal a Circular: α' rad = $\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$

Sistema Circular a Sistema Sexagesimal: $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\alpha'$

Grados	Radianes
1°	0.0175 rad.
$57{,}296^\circ$	1 rad.

Conversión de los ángulos más comunes.

Grados	Radianes
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
135°	$3\pi/4$
150°	$5\pi/6$
180°	π
210°	$7\pi/6$
225°	$5\pi/4$
240°	$4\pi/3$
270°	$3\pi/2$

300°	5π/3
315°	7π/4
330°	11π/6
360°	2π

Ejemplos.

1. Expresar el ángulo $\alpha = 70°\ 10´40´´$ en el sistema circular, entonces:

   $$\alpha = 70°10'40'' = 70° + \left(\frac{10}{60}\right) + \left(\frac{40}{3600}\right) = 70{,}178°$$

Su equivalencia en el sistema circular:

360° _____ 2π rad.

70,178° _____ α

$$\alpha = \frac{70{,}178°.2\pi}{360°} = 0{,}389\ \pi\ \text{rad} = 1{,}22\ \text{rad}.$$

2. Expresar el ángulo ß=2 rad. en el sistema sexagesimal, entonces:

   2π_____360°

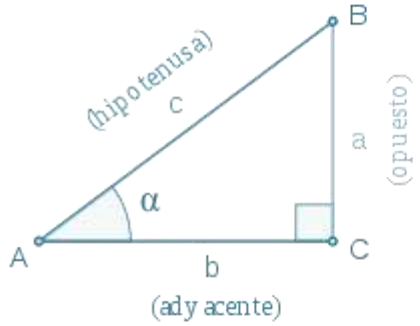
   2 rad._____ß

   $$\beta = \frac{2\ \text{rad}\ .\ 360°}{2\ \pi\ \text{rad}} = 114°35'30''$$

Aplicación de Trigonometría en triángulos rectángulos

Para resolver triángulos (*en general*) se suele utilizar los Teoremas del seno y del coseno, para el caso especial de triángulos rectángulos se utiliza generalmente el Teorema de Pitágoras.

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos



En triángulos rectángulos, las razones trigonométricas del seno, el coseno y la tangente pueden ser usadas para encontrar los ángulos y las longitudes de lados desconocidos. El cateto opuesto es el lado opuesto al ángulo agudo considerado.

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$	$\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \dfrac{c}{a}$
$\cos\ \alpha = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$	$\sec\ \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \dfrac{c}{b}$
$\tan\ \alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \dfrac{a}{b}$	$\text{cotan}\ \alpha = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \dfrac{b}{a}$

Nota: Los cocientes de las relaciones anteriores no dependen del tamaño del triángulo rectángulo.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b, y la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

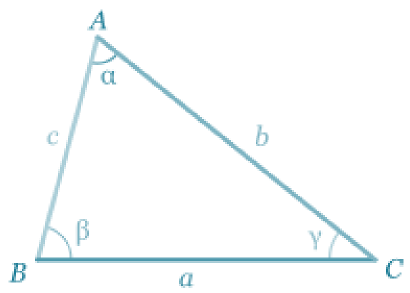
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \quad (1)$$

De la ecuación (1) se deducen fácilmente 3 corolarios de aplicación práctica:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema del seno

Si en un triángulo *ABC*, las medidas de los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son respectivamente *a*, *b*, *c*, entonces:

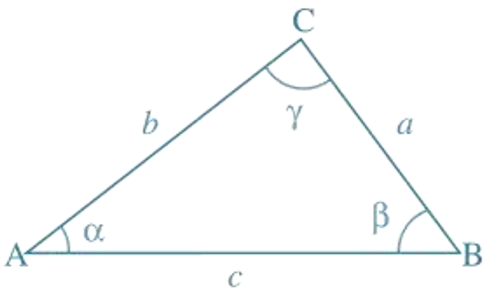


$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Teorema del coseno

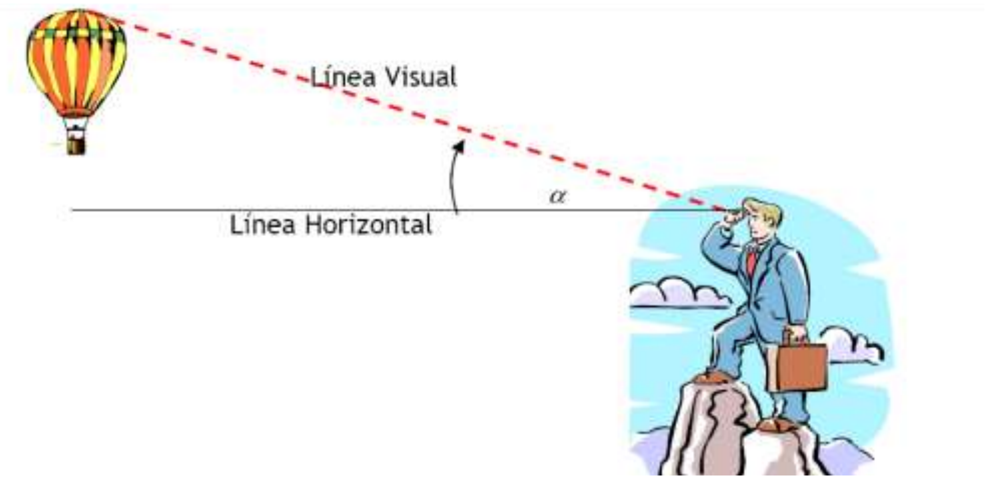
Dado un triángulo ABC, siendo α, β, γ, los ángulos, y *a*, *b*, *c*, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

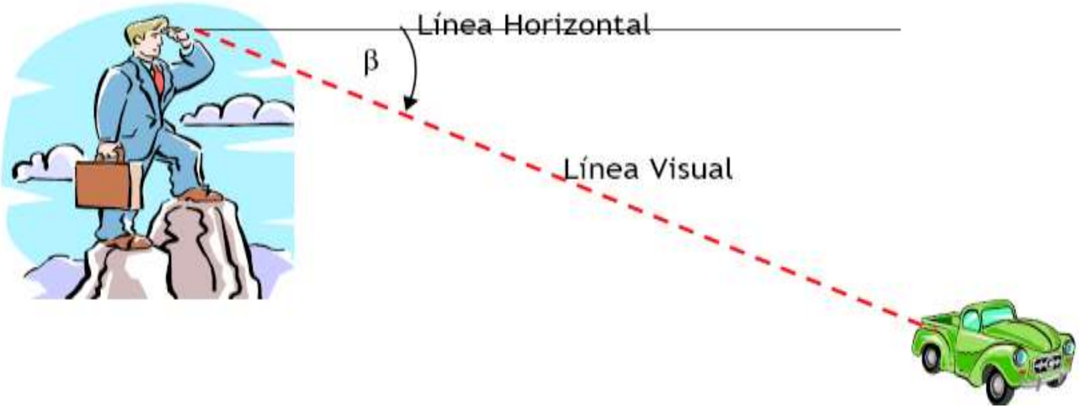


Ángulo de elevación y ángulo de depresión

Ángulo de Elevación: Es el ángulo a que forma la línea visual, que "sale" del ojo de un observador, que mira hacia arriba, y la línea horizontal correspondiente.

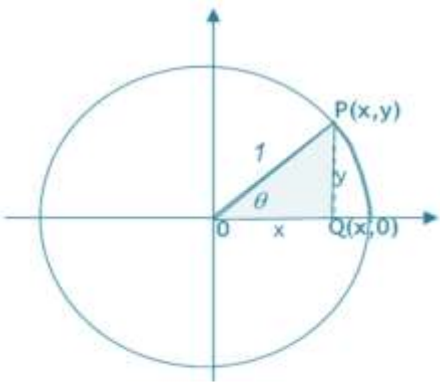


Ángulo de Depresión: Es el ángulo b que forma la línea visual, que sale del ojo de un observador que mira hacia abajo, y la línea horizontal.



Circunferencia trigonométrica

Se considera una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas, llamada "circunferencia trigonométrica". Permite analizar que sucede con los valores de las razones trigonométricas cuando el valor del ángulo está comprendido entre 0^o y 360^o (2π rad.).



Sea P(x, y) un punto sobre la circunferencia determinado por la intersección del lado móvil del ángulo con la circunferencia. La proyección del punto P sobre el eje x, determina el punto Q. El triángulo POQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitudes x e y. Por la definición se tiene que:

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{y}{1} = y \rightarrow y = \text{sen}\,\theta$

El valor de sen θ está representado por la ordenada del punto P.

$\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{x}{1} = x \rightarrow x = \cos\theta$

El valor de cos θ está representado por la abscisa del punto P.

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \dfrac{y}{x} \rightarrow \text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$ con $x \neq 0$

El valor de tg θ es el cociente entre la ordenada y la abscisa de P.

Signo de las razones trigonométricas

Razón trigonométrica	Ángulo en cuadrante			
	I	II	III	IV
sen α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-
sec α	+	-	-	+
cosec α	+	+	-	-

Relaciones trigonométricas

A partir de los resultados anteriores y aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo POQ se tiene que: $PQ^2+OQ^2=OP^2 \rightarrow$ se deduce la relación fundamental o relación pitagórica

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1} \quad (1)$$

Y como $\frac{PQ}{OQ} = tg\ \alpha$ se tiene que $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

Además a partir de la relación (1) podemos deducir otras relaciones:

$$\boxed{sen\ \alpha = \pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{cos\ \alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha}}$$

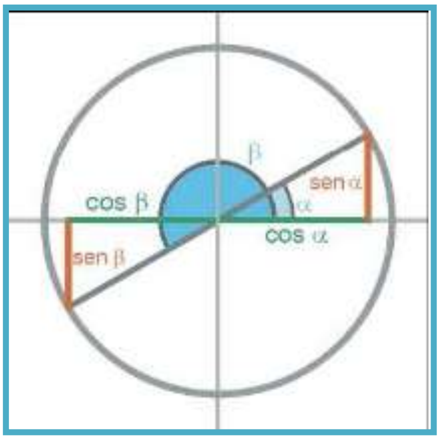
Relaciones entre los ángulos de distintos cuadrantes

Relación entre ángulos del 1º y 2º cuadrante: Sea α un ángulo del 1° cuadrante, entonces existe β del 2° cuadrante llamado suplementario a α. Esto es $\beta = 180° - \alpha$.

Por lo tanto, se tendrá que:

sen ß = sen α	cos ß = -cos α	tg ß = -tg α
cosec ß = cosec α	sec ß = -sec α	cotg ß = -cotg α

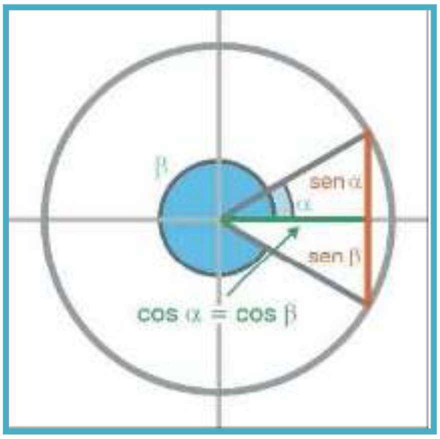
Relación entre ángulos del 1º y 3º cuadrante: Sea α un ángulo del 1° cuadrante, entonces existe β en el 3° cuadrante tal que $\beta = 180° + \alpha$.



Por lo tanto, se tendrá que:

sen ß = -sen α	cos ß = -cos α	tg ß = tg α
cosec ß = -cosec α	sec ß = -sec α	cotg ß = cotg α

Relación entre ángulos del 1º y 4º cuadrante: Sea α un ángulo del 1° cuadrante, entonces existe β en el 4° cuadrante tal que $\beta = 360° - \alpha$.



Por lo tanto, se tendrá que:

sen ß = -sen α	cos ß = cos α	tg ß = -tg α
cosec ß = -cosec α	sec ß = sec α	cotg ß = -cotg α

ANEXO I. LÓGICA SIMBÓLICA

La **Lógica** es la ciencia que estudia el pensamiento y sus relaciones.

Toda oración declamativa susceptible de ser verdadera o falsa, es una **proposición.**

Ejemplos.

"Tres es un número impar" es verdadero (V)

"Londres es una Capital de Francia" es falso (F)

$\Rightarrow$ Ambas son proposiciones

"¿Quién es?"

"Cierra la puerta" no son verdaderas ni falsas

$\Rightarrow$ No son proposiciones

Una **proposición simple** (sujeto + predicado) se simboliza mediante una letra (p, q, r).

Ejemplos:

"La silla es baja" se puede simbolizar como p

"La mesa es alta" se puede simbolizar como q

Las proposiciones simples pueden combinarse mediante **conectivos** para formar **proposiciones compuestas.**

Tabla de conectivos

"y"	$\wedge$	conjunción
"o"	$\vee$	disyunción
"no"	$\sim$	negación
"si... entonces..."	$\Rightarrow$	condicional
"si y sólo si"	$\Leftrightarrow$	bicondicional
"o ... o ..."	$\vee$	disyunción exclusiva

Ejemplos.

"la silla es baja y la mesa es alta" $p \wedge q$

“la silla es baja o la mesa es alta”	$p \vee q$
“la silla no es baja”	$\sim p$
“si la silla es baja, la mesa es alta”	$p \Rightarrow q$
“la silla es baja si y sólo si la mesa es alta”	$p \Leftrightarrow q$
“o la silla es baja o la mesa es alta”	$p \vee q$

Según sea una proposición V o F, se dice que su **valor de verdad** es V o F. El valor de verdad de una proposición compuesta depende del valor de verdad de cada proposición simple, y del tipo de conectivo que las vincula.

Ejemplo.

Sean: p: “tres es impar” y q: “1 + 1 = 6”

Entonces:

“tres es impar y 1+ 1=6”	F
“tres es impar o 1 + 1 = 6”	V
“1 + 1 ≠ 6”	V
“si tres es impar, 1 + 1 = 6”	F

Salvo en el caso de la negación, cuando hay 2 proposiciones simples, se presentan las siguientes posibles situaciones:

p	q	
V	V	p y q son V
V	F	p es V y q es F
F	V	p es F y q es V
F	F	Ambas son F

En el caso de la negación, si una proposición es verdadera su negación es falsa, y viceversa.

Para cada conectivo, se elabora una **tabla de verdad** para determinar el valor de verdad de la proposición compuesta en función del valor de verdad de sus proposiciones simples.

	p	q	$p \wedge q$
1	**V**	V	**V**
2	**V**	F	**F**
3	**F**	V	**F**
4	**F**	F	**F**

Para la conjunción, la proposición compuesta resulta V sólo si ambas proposiciones simples son V

1. p: "Londres es capital de Inglaterra" y q: "1 + 1 = 2"

$p \wedge q$ es V porque ambas afirmaciones son verdaderas al mismo tiempo ("y")

2. p : "Londres es capital de Inglaterra" y q: "1 + 1= 3"

$p \wedge q$ es F porque q es falsa

3. p: "París es capital de Inglaterra" y q: "1 + 1 = 2"

$p \wedge q$ es F porque p es falsa

4. p: "París es capital de Inglaterra" y q: "1 + 1 = 3"

$p \wedge q$ es F porque ambas son falsas

Las tablas de verdad para todos los conectivos son:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	V	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**
F	F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Si el valor de verdad de una proposición es siempre falso, la afirmación es una **contradicción.**

Ejemplo. $p \wedge \sim q$

p	~ p	$p \wedge \sim p$
V	F	**F**
F	V	**F**

→ No pueden ser ambas V y F al mismo tiempo

Si el valor de verdad resulta siempre V, es una **tautología.**

p	~ p	$p \vee \sim p$
V	F	**V**
F	V	**V**

Se pueden usar varios conectivos a la vez, haciendo uso de los paréntesis y procediendo paso a paso.

Ejemplo. $\sim (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
V	V	V	**F**
V	F	V	**F**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

Una **función proposicional** p(x) sobre el conjunto A es aquella que es verdadera o falsa cuando se hace p(a), siendo $a \in A$.

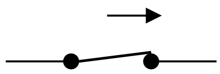
Ejemplo. Sea p(x): $x + 5 > 12$. Se ve que p(x) es una función proposicional sobre N (el conjunto de los naturales, ya que al reemplazar a x por cualquier número natural a, se hace que p(a) sea verdadera o falsa.

El **cuantificador universal** es "para todo" y se simboliza $\forall$. El **cuantificador existencial** es "existe al menos un" y se simboliza $\exists$.

Ejemplos. Sea p(x) una función proposicional sobre A. Si se quiere enunciar "para todo elemento x de A, p(x) es un enunciado verdadero" se escribe $\forall$ x $\in$ A, p(x). También puede decirse "para todo x, p(x)". Si se quiere enunciar "existe un elemento de A tal que p(x) es verdadero" se escribe $\exists$ x $\in$ A, p(x). También se puede decir "para algún x, p(x)".

Los conectivos pueden interpretarse como **circuitos eléctricos.**

V



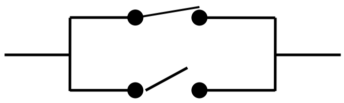
F

Cerrado **abierto**

Si los interruptores se conectan en serie, se precisa que ambos estén cerradas para que circule la corriente

Es el caso p $\wedge$ q (ambas V para que sea V)

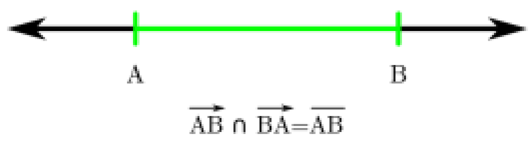
El circuito en paralelo corresponde a p $\vee$ q



ANEXO II. REVISIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA

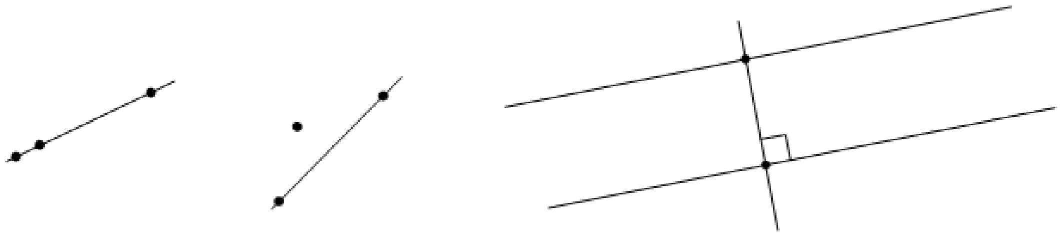
Puntos y rectas

- Dos puntos (no coincidentes) determinan **una recta** a la cual pertenecen.
- Dados dos puntos A y B se le llama **segmento $\overline{AB}$** a la intersección (∩) de la semirrecta de origen A que contiene al punto B con la semirrecta de origen B que contiene al punto A. Los puntos A y B son extremos del segmento y los puntos sobre la recta a la que pertenece el segmento (la «recta sostén»), serán interiores o exteriores al segmento según pertenezcan o no a este.



- Tres puntos son **colineales ⇔** (sí, y solo sí), pertenecen a la misma recta.
- **Punto medio o** punto equidistante: es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos. Un punto B es un punto medio del segmento $\overline{AC}$ ⇔ pertenece a $\overline{AC}$ y la longitud de $\overline{AB}$ es igual a la de $\overline{BC}$.
- **Segmentos consecutivos:** Dos segmentos son consecutivos cuando tienen en común únicamente un extremo. Según pertenezcan o no a la misma recta, se clasifican en:
  - Colineales, alineados o adyacentes.
  - No colineales.

- **Dos rectas son perpendiculares** entre sí ⇔ en su intersección se forman 4 ángulos de 90°.
- **La distancia** entre dos rectas paralelas es la longitud del segmento formado por las intersecciones de éstas rectas con una perpendicular a ambas.



a b c

Puntos y rectas: (a) Puntos colineales (b) Puntos no colineales (c)

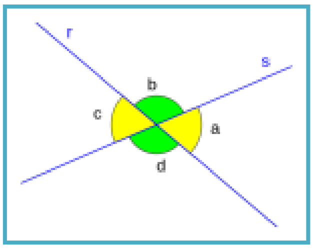
La distancia entre r y s es la longitud de AB, que es perpendicular a ambas.

Notación: <u>Punto</u>: letras mayúsculas (A, B, C, etc.); <u>Rectas y segmentos</u>: letras minúsculas (a, b, r, s, etc.), Ángulo: letras griegas minúsculas (α, β, δ, ε, etc.)

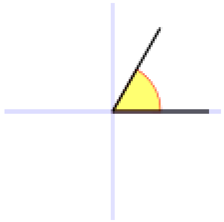
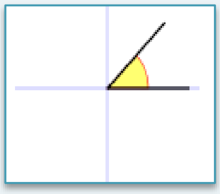
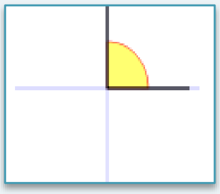
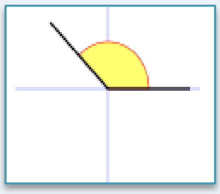
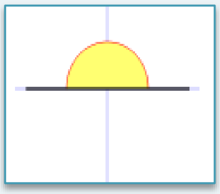
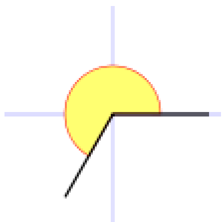
<u>Ángulos</u>

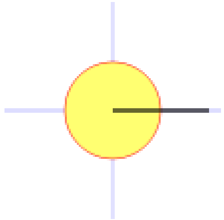
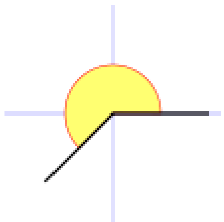
En Geometría euclídea dadas dos rectas **r** y **s**, del plano, que se cortan en el punto **P**, dos ángulos se dicen **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

En la figura los ángulos **a**, **c** y **b**, **d** son opuestos por el vértice. Dos ángulos opuestos por el vértice son **congruentes.**



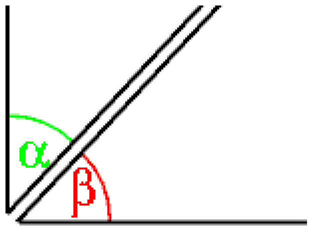
Clasificación de los ángulos

Tipo	Descripción
Ángulo **Nulo** 	Es el ángulo formado por dos semirrectas coincidentes, por lo tanto su abertura es nula, o sea de 0°.
Ángulo **convexo** o saliente 	Es todo ángulo mayor a 0° y menor a 180° sexagesimales. A su vez se dividen en: – Ángulo agudo: es aquel cuya amplitud es mayor a 0° y menor a 90°. – Ángulo recto: su amplitud es exactamente 90°. – Ángulo obtuso: su amplitud es mayor a 90° y menor a 180°. – Ángulo llano: su amplitud es exactamente 180°.  Ángulo agudo  Ángulo recto  Ángulo obtuso  Ángulo llano
Ángulo **cóncavo**, reflejo o entrante 	Es todo ángulo cuya amplitud es mayor a 180° y menor a 360°.

Ángulo completo o perigonal 	Un ángulo completo o perigonal, tiene una amplitud de360° ≡ 2 π rad
	Ángulo que no es recto ni múltiplo de un ángulo recto. Los ángulos agudos y obtusos son ángulos oblicuos.

Relaciones aritméticas entre ángulos

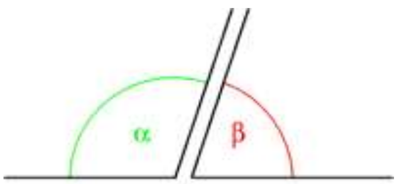
- **Ángulos complementarios** son aquellos ángulos cuyas **medidas suman 90º**. Si dos ángulos complementarios son consecutivos, los lados no comunes de los dos forman un ángulo recto. $\boldsymbol{\beta = 90° - \alpha°}$



Los ángulos α y β son complementarios.

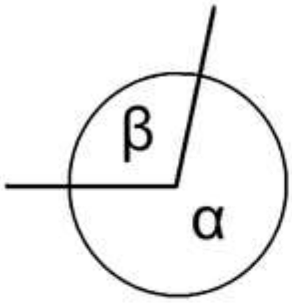
La diagonal de un rectángulo también configura ángulos complementarios con los lados adyacentes.

- **Ángulos suplementarios** son aquellos cuya **suma de medidas es 180°. $\boldsymbol{\beta = 180° - \alpha°}$.** En el sistema radial o circular de medición, 180 grados sexagesimales equivalen a π radianes, y 360 grados sexagesimales equivalen a 2π radianes.



Ángulos suplementarios

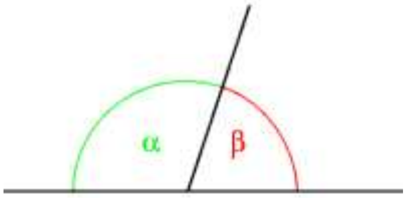
– **Ángulos conjugados** son dos ángulos cuyas **medidas suman 360º**. Dos ángulos conjugados con vértices coincidentes, tendrán sus lados comunes. **$\beta = 360° - \alpha °$**



Ángulos conjugados

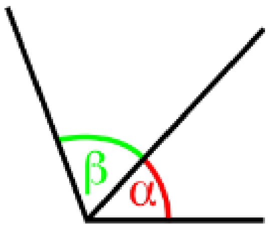
Relaciones posicionales entre ángulos

– **Ángulos adyacentes** son aquellos ángulos que tienen el vértice y un lado en común, al tiempo que sus otros dos lados son semirrectas opuestas. De allí resulta que los ángulos adyacentes son a la vez consecutivos y suplementarios, porque juntos equivalen a un ángulo llano (180°), sin poseer ningún punto interior en común.



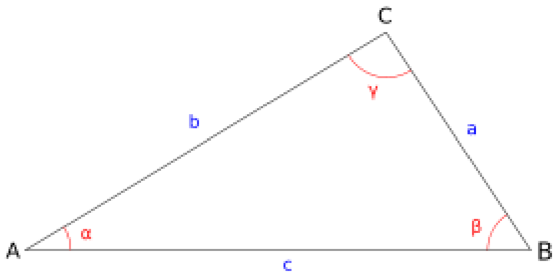
Ángulos adyacentes

– **Ángulos consecutivos** son aquellos que poseen un mismo vértice y tienen un lado común. Así, dados varios ángulos, serán consecutivos cuando cada uno de ellos esté ordenado de forma que comparta un lado con el ángulo siguiente y todos tengan el mismo vértice. Son ángulos consecutivos los conjugados y los adyacentes.



Ángulos consecutivos

- **Ángulo interior** o **interno** es un ángulo formado por dos lados de un polígono que compartiendo un extremo común, está contenido dentro del polígono.



Un triángulo tiene tres ángulos interiores, denominados en la figura: α, β, γ.

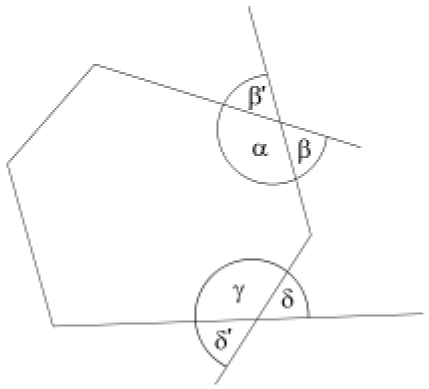
Observación: *Si todos los ángulos interiores de un polígono convexo son iguales y todos sus lados tienen la misma longitud, se trata de un* ***polígono regular****.*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha i = 180° * (n-2)$$ *Suma de los ángulos interiores de un polígono regular*

Polígono convexo: Si todos los ángulos interiores de un polígono no superan los 180°. Si existe por lo menos un ángulo superior a 180 grados, se trata de un polígono cóncavo.

- **Ángulo exterior** o **externo** es el ángulo formado por un lado de un polígono y la prolongación del lado adyacente. En cada vértice de un polígono es posible crear dos ángulos exteriores, que poseen la misma amplitud. Cada ángulo exterior es suplementario del ángulo interior que comparte el mismo vértice.

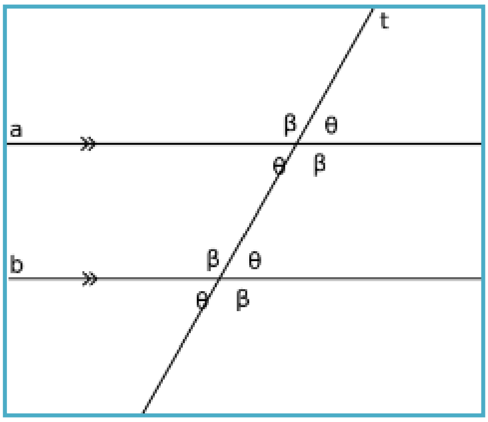
Ejemplo: La medida del ángulo exterior adyacente **$\beta = 180º - \alpha = \beta'$**



Los ángulos β, β', δ y δ' son ángulos exteriores de este hexágono irregular. Los ángulos α y β son suplementarios. Como $\beta = \beta'$, también son suplementarios α y β'.

Determinados por dos rectas paralelas y otra transversal- (Ángulos correspondientes)

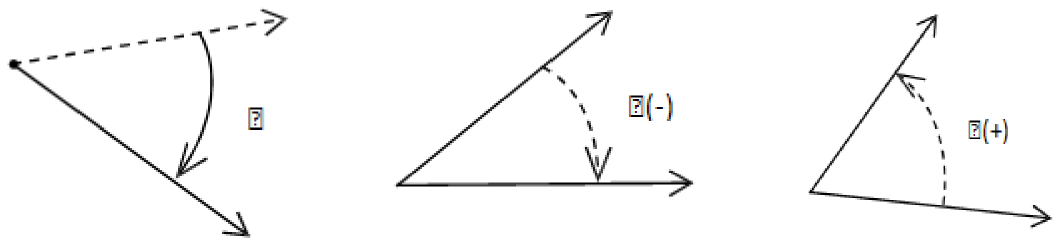
- **Ángulos alternos externos:** parejas de ángulos: <1 y <7; <2 y <8
- **Ángulos alternos internos:** parejas de ángulos: <4 y <6; <3 y <5 se llaman ángulos alternos internos, y son congruentes, son los que están dentro de las paralelas



Ángulos según su el sentido de giro

Un ángulo es generado por una semirrecta que gira sobre su punto extremo:

- Ángulo negativo: cuando se realiza el giro en el sentido de las agujas del reloj.
- Ángulo positivo: el giro es en sentido antihorario.



a b c

Ángulos (a) Un ángulo visto como generado a partir del giro de una semirrecta

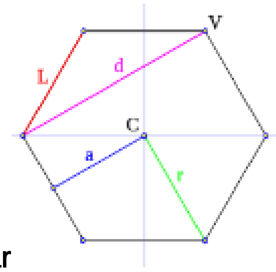
(b) Ángulo negativo   (c) Ángulo positivo.

POLÍGONOS

> Un polígono es una figura plana con todos sus lados rectos, que no se cruzan entre sí y con un punto en común que es un extremo del mismo. Poli, del griego: muchos; y gonos del griego: ángulos.

Elementos geométricos que lo componen

- Vértices: cada uno de los puntos que determinan el polígono.
- Lados: cada uno de los segmentos determinados por dos vértices consecutivos.
- Diagonales: cada uno de los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos.
- Ángulo interior: ángulos que se encuentran en el interior de un polígono.
- Ángulo exterior: ángulo formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.



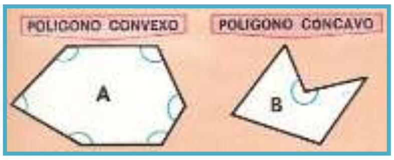
Hexágono regular

En un polígono regular se puede distinguir, además:

- Centro (C): es el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- Ángulo central (AC): es el formado por dos segmentos de recta que parten del centro a los extremos de un lado.
- Apotema (a): es el segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.
- Diagonales

Clasificación de polígonos

- Polígonos convexos: todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.
- Polígonos cóncavos: si al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180°.



Propiedades

- Cada ángulo exterior es suplementario del ángulo interior correspondiente.
- Cada lado es menor que la suma de los demás.
- La suma de los ángulos **interiores** de un polígono de n lados es igual a **180° * (n-2)**.
- La suma de los ángulos **exteriores es siempre igual a 360°**, sin importar el número de lados.

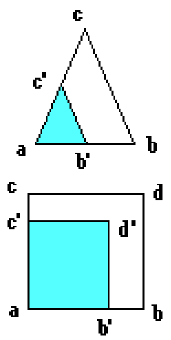
Aclaración: esto se cumple considerando un solo ángulo exterior por cada ángulo interior.

Perímetro de un polígono: es la suma de las longitudes de los lados

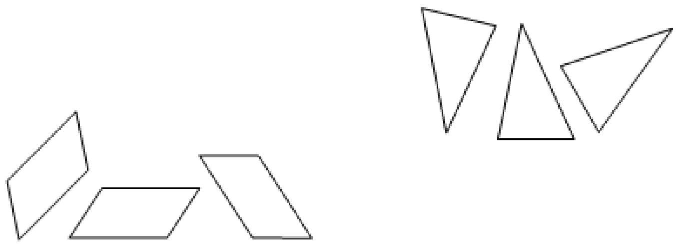
Igualdad y semejanza en las figuras geométricas

Dos figuras geométricas son **iguales o congruentes** cuando tienen iguales todos sus lados y todos sus ángulos; y por lo tanto tienen la misma forma y el mismo tamaño, pudiendo diferir en la orientación.

Dos figuras geométricas **son semejantes** cuando tienen iguales sus ángulos, pero sus lados son diferentes; y por lo tanto tienen la misma forma y distinto tamaño.



Figuras semejantes


Polígonos congruentes entre sí con orientaciones diferentes

Clases de polígonos

Los polígonos se clasifican además según los siguientes criterios:

1. Por la igualdad o desigualdad de lados:

   – Polígonos regulares: todos los lados son de igual extensión;

   – Polígonos irregulares: por lo menos alguno de los lados es de extensión distinta.

2. Por la cantidad de lados, aunque por referencia a la igual cantidad de ángulos:

   – Triángulos: 3 lados y 3 ángulos.

   – Cuadriláteros: 4 lados y 4 ángulos.

   – *Pentágonos.* Exágonos. Heptágonos. Octógonos. Encágonos. Decágonos. Undecágonos. Dodecágonos. Más de 12 lados, se indica el número de lados.

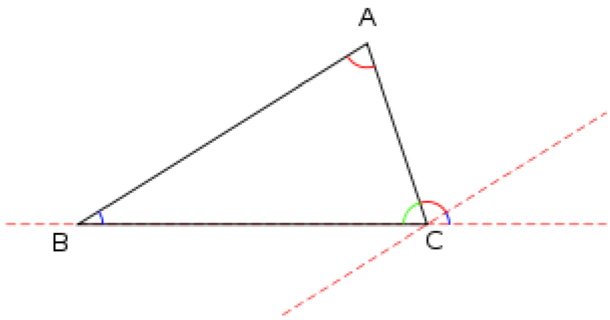
3. Por la existencia de una o más líneas que los dividan en mitades iguales:

   – Polígonos simétricos: tienen uno o más ejes de simetría.

   – Polígonos asimétricos: no tienen ningún eje de simetría.

TRIÁNGULOS

El triángulo es un polígono de **tres lados**. Posee 3 ángulos interiores, 3 ángulos exteriores, 3 lados y 3 vértices. Es el más simple y el único que no tiene diagonal. Tres puntos no alineados definen siempre un triángulo (tanto en el plano como en el espacio).



Propiedades de los triángulos

- Todo polígono puede ser dividido en un número finito de triángulos, por **triangulación**. El número mínimo de triángulos necesarios para ésta división es n-2, donde *n* es el número de lados del polígono.

- En geometría **euclidianala suma de los tres ángulos internos de un triángulo es siempre 180°**, lo que equivale a π radianes: $\alpha + ß + \gamma = 180^\circ = \pi$
- La suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del tercer lado.
- El valor de la paralela media de un triángulo (recta que une dos puntos medios de dos lados) es igual a la mitad del lado paralelo.

Teoremas aplicados a triángulos

Teorema del seno: Cualquier triángulo verifica que:

«Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos»

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Teorema del coseno: Cualquier triángulo verifica que: «El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble del producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido»:

$$a^2= b^2+c^2-2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2= a^2+c^2-2ac \cos(ß)$$

$$c^2= a^2+b^2-2ab \cos(\gamma)$$

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa (c) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (a, b).

$$c^2= b^2+a^2$$

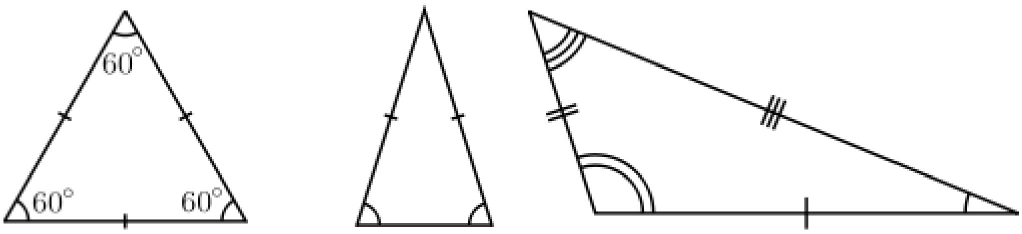
Clasificación de los triángulos

Los triángulos se pueden clasificar según los siguientes criterios:

1. Por la relación entre las longitudes de sus lados

- **Equilátero:** los tres lados del triángulo son del mismo tamaño, con tres ángulos internos de 60 grados ó $\pi/3$radianes.)
- **Isósceles:** tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida.

- **Escaleno:** todos sus lados tienen longitudes diferentes, no hay dos ángulos que tengan la misma medida.



Equilátero Isósceles Escaleno

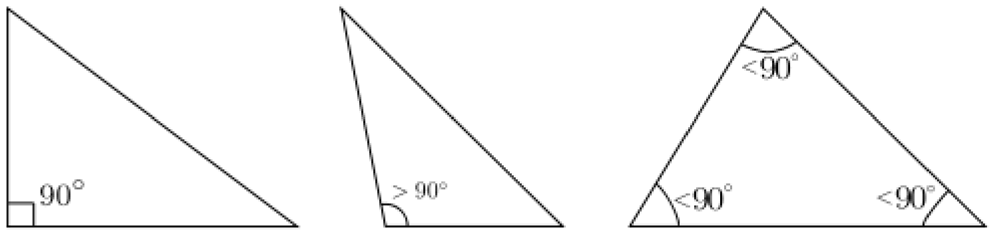
2. Por la amplitud de sus ángulos:

   - **Rectángulo:** posee un ángulo interior recto (90°). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina *catetos* y al otro lado *hipotenusa*.

   - **Oblicuángulo:**

     Obtusángulos: uno de sus ángulos interiores es obtuso (mayor de 90°); los otros dos son agudos (menores de 90°).

     Acutángulos: sus tres ángulos interiores son menores de 90°.



Rectángulo Obtusángulo Acutángulo

Oblicuángulo

3. Según los lados y los ángulos.

   Los triángulos acutángulos pueden ser:

   - **Acutángulo isósceles**: con todos los ángulos agudos, siendo dos iguales, y el otro distinto. Este triángulo es simétrico respecto de su altura.

   - **Triángulo acutángulo escaleno**: con todos sus ángulos agudos y todos diferentes, no tiene eje de simetría.

   - **Triángulo acutángulo equilátero**: sus tres lados y sus tres ángulos son iguales; las tres alturas son ejes de simetría (dividen al triángulo en dos triángulos iguales).

Los triángulos rectángulos pueden ser:

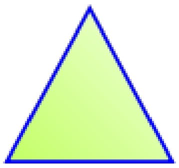
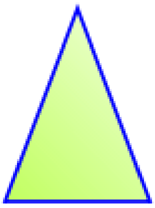
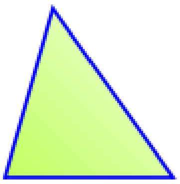
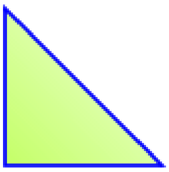
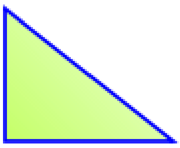
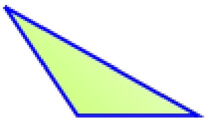
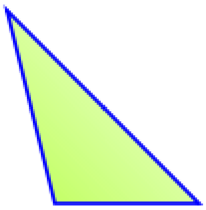
- **Triángulo rectángulo isósceles**: con un ángulo recto y dos agudos iguales (de 45° cada uno), dos lados son iguales y el otro diferente: los lados iguales son los catetos y el diferente es la hipotenusa. Es simétrico respecto a la altura de la hipotenusa, que pasa por el ángulo recto.

- **Triángulo rectángulo escaleno**: tiene un ángulo recto, y todos sus lados y ángulos son diferentes.

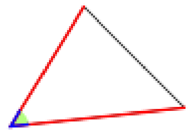
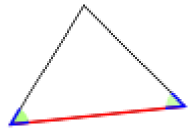
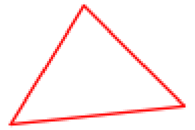
Los triángulos obtusángulos pueden ser:

- **Triángulo obtusángulo isósceles**: tiene un ángulo obtuso, y dos lados iguales que son los que forman el ángulo obtuso; el otro lado es mayor que éstos dos.

- **Triángulo obtusángulo escaleno**: tiene un ángulo obtuso y todos sus lados son diferentes.

Triángulo	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

Congruencia y semejanza de triángulos

Triángulo	Postulados de congruencia
	**Postulado LAL** (Lado, Ángulo, Lado): Dos triángulos son congruentes si dos lados de uno tienen la misma longitud que dos lados del otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida.
	**Postulado ALA** (Ángulo, Lado, Ángulo : Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente. (El lado comprendido entre dos ángulos es el lado común a ellos).
	**Postulado LLL** (Lado, Lado, Lado): Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.

Teorema AAL (Ángulo, Ángulo, Lado) de Congruencia de triángulos: Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y un lado, no comprendido entre los ángulos, tienen la misma medida y longitud, respectivamente.

Semejanza de triángulos:

- **Criterio AA** (Ángulo, Ángulo). Si dos de sus ángulos son semejantes.
- **Criterio LAL** (Lado, Ángulo, Lado). Si dos de sus lados son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.
- **Criterio LLL** (Lado, Lado, Lado). Si sus tres lados **son proporcionales**.

Triángulos rectángulos

Congruencia de triángulos rectángulos

- **Criterio HC** (Hipotenusa, Cateto). Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y el cateto de uno de los triángulos tienen la misma medida que los correspondientes del otro.
- **Criterio CC** (Cateto, Cateto). Dos triángulos rectángulos son congruentes si los catetos de uno de los triángulos tienen la misma medida que los catetos correspondientes del otro.
- **Criterio HA** (Hipotenusa, Ángulo). Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un ángulo agudo de uno de los triángulos tienen la misma medida que los correspondientes del otro.
- **Criterio CA** (Cateto, Ángulo). Dos triángulos rectángulos son congruentes si el cateto y un ángulo agudo (el adyacente o el opuesto) de uno de los triángulos tienen la misma medida que los correspondientes del otro.

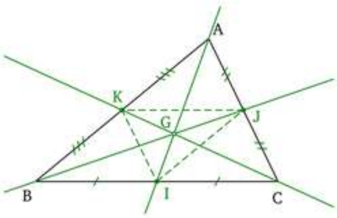
Semejanza de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes si cumplen con al menos uno de los criterios siguientes:

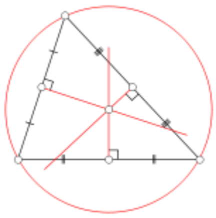
- Si uno tiene un ángulo agudo de igual amplitud que un ángulo agudo del otro.
- Si uno tiene los dos catetos proporcionales con los del otro.
- Si uno tiene un cateto y la hipotenusa proporcionales con los del otro

Elementos notables de un triángulo

- ***Medianas de un triángulo:*** es el segmento de recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.



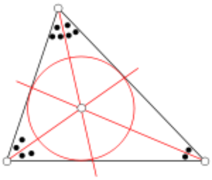
- ***Mediatriz:*** Se llama mediatriz de un lado de un triángulo a la recta perpendicular a dicho lado trazada por su punto medio. Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes en un punto O equidistante de los tres vértices.



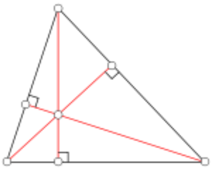
- ***Circunferencia circunscrita:*** La circunferencia de centro **O** y radio **OA** que pasa por cada uno de los tres vértices del triángulo es la **circunferencia circunscrita** al triángulo, y su centro se denomina circuncentro.

- En un triángulo acutángulo, el centro de la circunferencia circunscrita está dentro del triángulo.
- En un triángulo obtusángulo, el centro de la circunferencia circunscrita está fuera del triángulo.
- En un triángulo rectángulo, el centro de la circunferencia circunscrita es el punto medio de la hipotenusa.

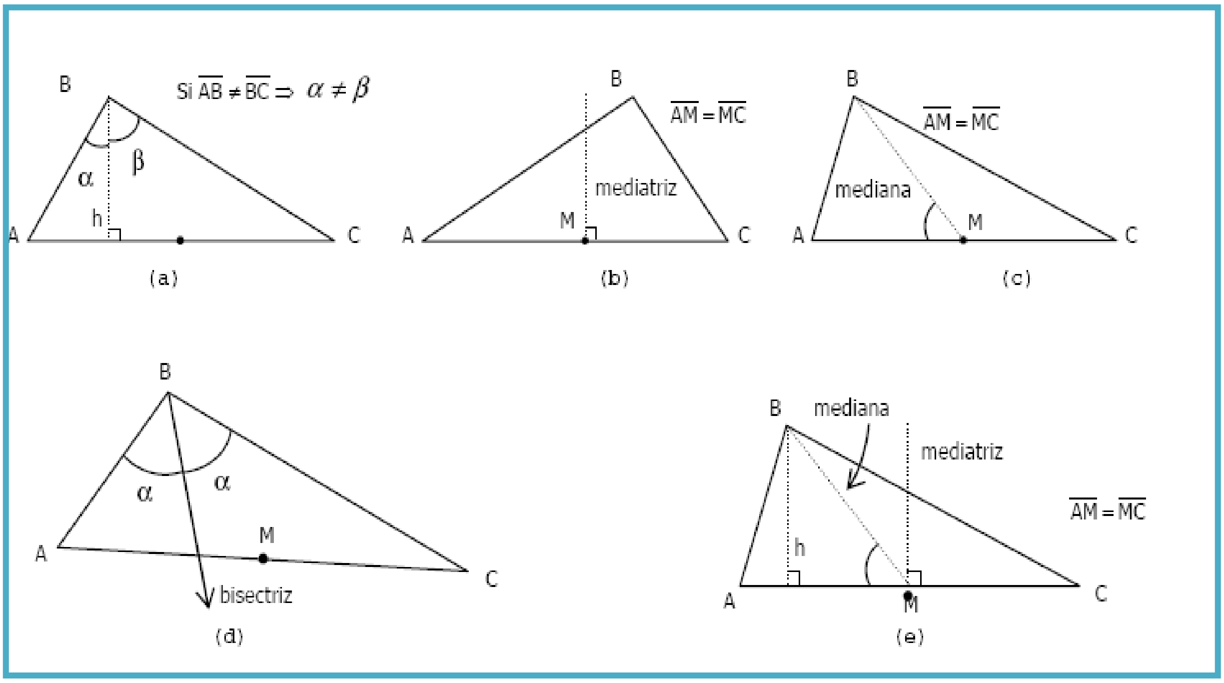
- ***Bisectriz***: Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.



- *Alturas*: Es el segmento de recta que une un vértice del triángulo con el lado opuesto o su prolongación- formando un ángulo recto. El lado opuesto es la **base** del triángulo. Todos los triángulos tienen tres altura que se cortan en un punto único *H* (son *concurrentes*), llamado ***ortocentro*** del triángulo.



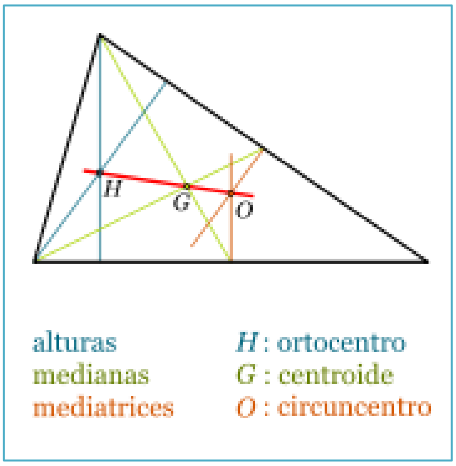
Elementos notables de un triángulo



Centros del triángulo

Geométricamente se pueden definir varios centros en un triángulo:

- **Baricentro o Centroide**: es el punto que se encuentra en la intersección de las medianas, y equivale al centro de gravedad.
- **Circuncentro**: es el centro de la circunferencia circunscrita, aquella que pasa por los tres vértices del triángulo. Se encuentra en la intersección de las mediatrices de los lados. Además, la circunferencia circunscrita contiene los puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con las bisectrices que pasan por el vértice opuesto.
- **Incentro:** es el centro de la circunferencia inscrita, aquella que es tangente a los lados del triángulo. Se encuentra en la intersección de las bisectrices de los ángulos.
- **Ortocentro:** es el punto que se encuentra en la intersección de las alturas.
- **Excentros:** son los centros de las circunferencias exinscritas. Se encuentra en la intersección de una bisectriz interior y dos bisectrices exteriores de los ángulos.



El único caso en que los cuatro primeros centros coinciden en un único punto es en un triángulo equilátero.

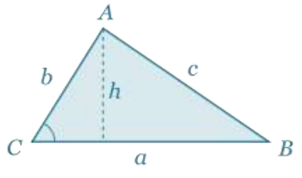
Perímetro y área de un triángulo

- ✓ Perímetro: Sea un triángulo cuyos lados tienen longitudes $L_1+L_2+L_3$

$$P=L_1+L_2+L_3$$

- ✓ Área: El área de un triángulo es igual a un medio del producto de la base por la altura.

$\boxed{A=\frac{bh}{2}}$ Área con la longitud de dos lados y el ángulo comprendido



$$\frac{ah}{2}=\frac{ab\sin C}{2}$$

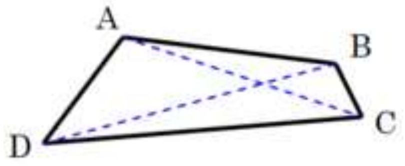
Cuadriláteros

Son los polígonos que tienen 4 lados.

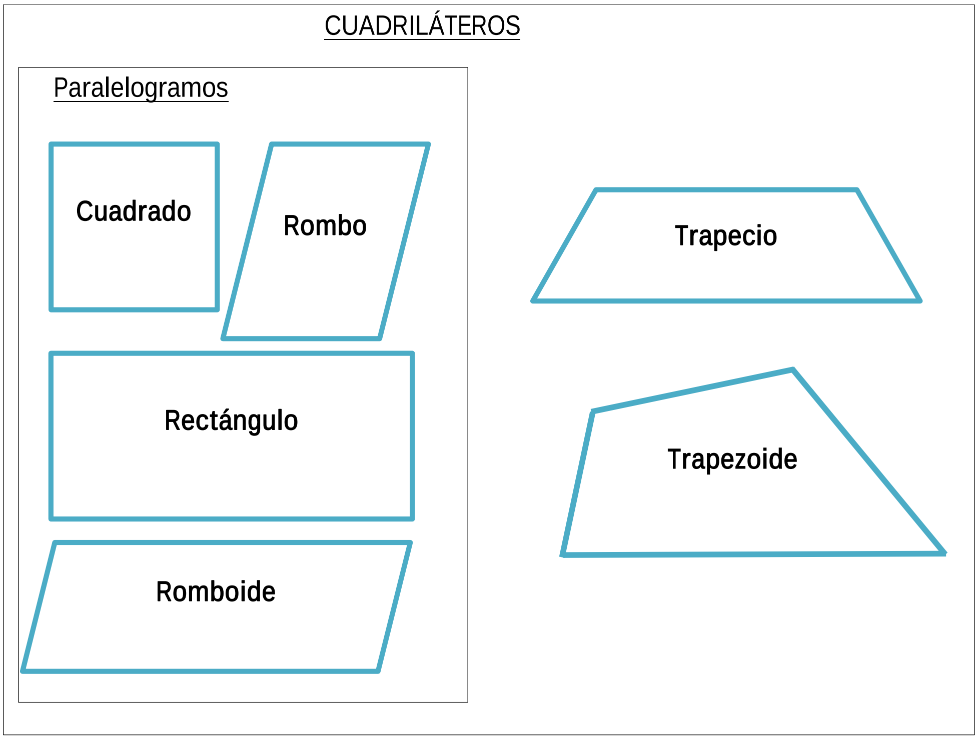
Clasificación de los cuadriláteros: Paralelogramo, trapecio y trapezoide.

- **Paralelogramo**: Es el cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide. Sus elementos son los mismos ya definidos para los polígonos en general: vértices, lados, diagonales, ángulos interiores, ángulos exteriores.

Observación: La altura de los paralelogramos, se determina indistintamente tomando como base cualquiera de sus lados, y consiste en la distancia perpendicular entre la base, y el lado opuesto. En el rombo, el romboide y el trapecio, la altura será la distancia perpendicular entre los lados paralelos.

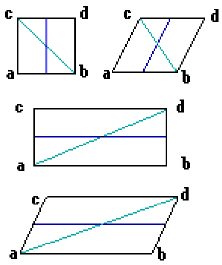


Un cuadrilátero con sus diagonales.



Elementos de los cuadriláteros:

*Diagonal y mediana de los cuadriláteros. Se denomina diagonal a la línea que une a dos ángulos o vértices opuestos. La mediana es una línea que une los puntos medios de dos lados opuestos.

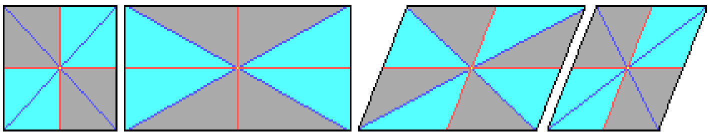


Diagonal y mediana
en los paralelogramos

*La simetría. Hace referencia a una igualdad de medidas a través de una línea llamada eje de simetría; y se aplica a la cualidad de aquellas figuras planas que son iguales aunque se presentan en una posición distinta respecto de una línea (como en una imagen de espejo).

Una misma figura, en algunos casos, puede tener simetría a la vez respecto de un eje y respecto de un punto, que en ciertos casos constituye su centro de simetría.

Los paralelogramos tienen la propiedad de generar nuevas figuras exactamente iguales, mediante una diagonal o una mediana; tienen a la vez eje de simetría y centro de simetría.


Ejes y centro de simetría en paralelogramos

Propiedades:

- La suma de sus ángulos interiores es igual a 360°. Demostración: La fórmula de la suma de ángulos interiores de un polígono con n = 4. 180° (n-2) = 180° (4-2) = 180° * 2 = 360°
- Lados opuestos paralelos tienen igual longitud.
- Cada diagonal del paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.
- Los ángulos opuestos son iguales. Los pares de ángulos consecutivos son suplementarios.
- Las diagonales se bisecan (intersecan en el punto medio) mutuamente.

Nota: las diagonales de un paralelogramo (no rectángulo) no tienen igual longitud.

- **Trapecio**: Es el cuadrilátero que tiene dos, y sólo dos, lados opuestos paralelos.

Clasificación: *Trapecio rectángulo* (tiene dos de sus ángulos rectos),

Trapecio isósceles (sus lados no paralelos son iguales),

Trapecio escaleno (sus cuatro ángulos son desiguales, no es ni rectángulo ni isósceles).

Esquema de trapecios

Propiedades:

- Tiene los mismos elementos ya definidos para los polígonos en general: vértices, lados, diagonales, ángulos interiores, ángulos exteriores.
- Los lados paralelos se denominan bases del trapecio.
- El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se denomina base media del trapecio (su longitud es el promedio de las longitudes de las bases).
- La distancia entre las bases es la altura del trapecio.

- **Trapezoide**: En geometría euclídea plana, un trapezoide es un cuadrilátero convexo sin lados paralelos.

  Propiedades:

- Un trapezoide puede ser inscrito en un círculo si la suma de algún par de ángulos opuestos es de 180°.
- Un trapezoide puede ser circunscrito en un círculo si la suma de sus pares de lados opuestos son iguales entre sí.
- Un trapezoide, con la definición presentada, tiene exactamente dos diagonales, cuyos puntos interiores están en el interior de la figura.
- Un trapezoide simétrico tiene un eje de simetría y sus diagonales son perpendiculares.

Circunferencia y círculo

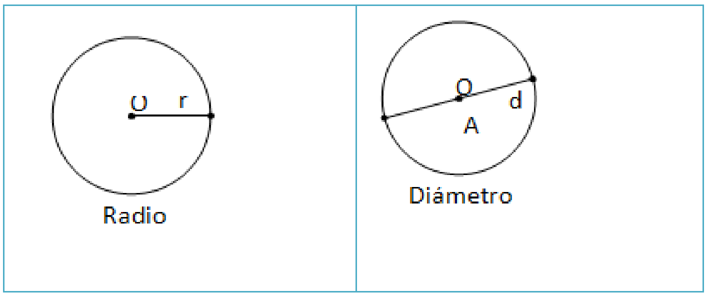
Sea O un punto del plano y r una distancia. El conjunto de puntos que están a distancia r de O determinan una circunferencia de radio r.

Una circunferencia y todos sus puntos interiores es un círculo de radio r.

Elementos

Radio: cualquier segmento que une el centro con un punto cualquiera que pertenece a la circunferencia.

Diámetro: cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro.



PERÍMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA: $P=\pi.d$ ó $P=2\pi.r$
ÁREA DEL CÍRCULO: $\pi . r^2$

ANEXO III. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** relaciona letras y números mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. Las letras son variables que se usan para representar números reales.

Ejemplos. $x^2 + 2\,xy$

$\sqrt{2}^a + a^2 b^3$

$nm / n^2 + 1$

- Si las variables toman valores numéricos pueden obtenerse el valor de la expresión algebraica.

Ejemplo. $a^2 + 2\,b$

Si $a = 2$; $b = 1$

$(2)^2 + 2\,(1) = 4 + 2 = 6$

- Hay tres clases de expresiones algebraicas:

1. **enteras**: las variables están afectadas por operaciones de adicción, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplo. $a^2 + c$

2. **fraccionarias**: alguna variable figura en el denominador o hay alguna potencia entera negativa.

Ejemplo. $x^2 + x\,y^2 \;/\; 2\,y^2$

$3x\,y^{-2}$

3. **irracionales**: las variables están afectadas por operaciones de radicación.

Ejemplo. $\sqrt{x} + 2\,xy$

Un **monomio** es una expresión en la que aparecen variables elevadas a potencias de un exponente natural, multiplicadas por un coeficiente numérico.

Ejemplo. $-3\,x\,y^2$ (variables: x e y; coeficiente: 3)

$-\frac{1}{2}\,a\,b$ (variables: a, b; coeficiente: ½)

- La suma o resta de varios monomios conforma un **polinomio.**

Ejemplo. $3x^2 + 2\,x\,y - 5$

Observación: -5 es un término numérico que puede ser interpretado como: $(-5\,x^0\,y^0)$.

- La suma o resta de dos monomios conforma un **binomio**.

Ejemplo. $3x^2 + y^2$

Operaciones con monomios

- Sólo pueden sumarse y/o restarse monomios cuando sus variables (parte literal) son idénticos en ambos. En este caso, se suman o restan sus coeficientes.

Ejemplo. $2bx^2 + 3bx^2 = 5b\,x^2$

Observación: La parte literal es idéntica (bx^2) por lo que se pueden sumar los coeficientes.

- En el producto no hay restricciones: se multiplican los coeficientes, y se opera sobre las variables según las propiedades de la potenciación.

Ejemplo. $(3\,ab).(\frac{1}{2}\,a\,b^2x) = 3/2\,a^2\,b^3x$

O sea $3.\frac{1}{2} = 3/2$

$a.a= a^2$

$b.\,b^2 = b^3$

$1.\,x= x$

Observación: puede suponerse que el 1° monomio esta multiplicado por x^0.

- El producto entre monomio y polinomio, o entre polinomios, se efectúa aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo. $x\,(y - 2x)$
Aplicando propiedad distributiva: $xy - 2\,xy$
Ahora tomando (x) como factor común (es *factor* porque está multiplicando, y es *común* porque está en ambos miembros): $xy - 2xy = (x)\,(y - 2y)$

Ejemplo. Probar que $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
Resolviendo el miembro de la izquierda: $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$
Distribuyendo: $a^2 + ba + ab + b^2$
Agrupando: $a^2 + 2\,ab + b^2$ porque ba= ab y pueden sumarse.
En el caso de $(a - b)^2$, también resulta un trinomio cuadrado perfecto: $a^2 - 2\,ab + b^2$.

Polinomios

Un **polinomio** P(x) es una expresión de la forma

$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$

donde:

a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 son números reales llamados coeficientes,

x es la variable,

n es el grado del polinomio,

a_0 es el término independiente.

- Un polinomio está completo si figuran todos sus términos (incluso los de coeficientes nulos).

Ejemplos. $3x^3 + \frac{1}{2}x + 6$ (incompleto)

$3x^3 + 0x^2 + \frac{1}{2}x + 6$ (completo)

Operaciones con polinomios

La suma, resta y división de polinomios gozan de las mismas propiedades que las correspondientes operaciones entre reales.

- La **adición** de polinomios se efectúa sumando los coeficientes de los términos de igual grado.

Ejemplo: sumar P(x) + Q(x), donde $P(x)=2x^2 + 3$; $Q(x)=3x^2 + x + 5$.

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 + x + 8$$

- En la **sustracción**, se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo.

Ejemplo. Siendo $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8$; $Q(x) = 2x^2 - 1$, efectuar $2P(x) - x\,Q(x)$

$2P(x) - x\,Q(x) = 2(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8) - x(2x^2 - 1)$

$= (2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 16) + (-2x^3 + x)$

$= 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 16$

- El **producto** de dos polinomios se lleva a cabo aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo

Sean $P(x)=2x^2 + 3$; $Q(x)=3x^2 + x + 5$. Efectuar el producto de P(x).Q(x)

$$P(x).\,Q(x) = (2x^2 + 3).\,(3x^2 + x + 5)$$

$= 6x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 9x^2 + 3x + 15$

$= 6x^4 + 2x^3 + 19x^2 + 3x + 15$

- La **división** de un monomio por otro resulta en otro monomio, cuyo signo surge de aplicar la regla de los signos de la división, su coeficiente es el cociente entre los coeficientes de ambos monomio, y las variables surgen de operar de acuerdo a las reglas de potenciación.

Ejemplo: Dados $P(x)=-4x^3y^5$; $Q(x)=-2x^2y$; hallar $P(x) / Q(x)$

$P(x) \ / \ Q(x) = (-4x^3 y^5) \ / \ (-2 x^2 y) = 2 xy^4$

Dados $P(x)=-4x^3 y^5$; $Q(x)=-2 x^2 y$; hallar $Q(x) \ / \ P(x)$

$Q(x) \ / \ P(x) = (-2 x^2 y) \ / \ (-4x^3 y^5) = ½\, x^{-1} y^{-4}$

- La **división** de un polinomio por un monomio se efectúa como en el caso anterior, tomando de a un término del polinomio a la vez.

Ejemplo. Sean $P(x)= 5m^4nx^4 + 2/3\ m^3n^2x - 4m^3xy$; $Q(x)=2m^3x$; hallar $P(x)/Q(x)$

$P(x)/Q(x)= (5m^4nx^4 + 2/3\ m^3n^2x - 4m^3xy)/\ (2m^3x)$

$= (5m^4nx^4)/\ (2m^3x)+ (2/3\ m^3n^2x)/\ (2m^3x)+ (4m^3xy)/\ (2m^3x)$

$= 5/2\ mnx^3 + 1/3\ n^2 - 2y$

- La división entre polinomios P(x) y Q(x) precisa de los siguientes requisitos:

P(x), el dividendo, debe ser polinomio completo y ordenado.

Q(x), el divisor, debe estar ordenado.

Observación: un polinomio se ordena por potencias decrecientes.

La división cumple P(x)= Q(x).C(x) + R(x), donde C(x) es el cociente y R(x) es el resto, ambos a averiguar.

Ejemplo. Sean $P(x) = 2\ x^3 + 0\ x^2 + x - 1$ y $Q(x) = x^2 - x + 2$. Calcular el cociente y el resto que se obtiene al dividir P(x) en Q(x).

$2\ x^3 + 0\ x^2 + x - 1 \quad | \quad \underline{x^2 - x + 2}$

$2x^3 - 2x^2 + 4x \qquad 2x + 2$

$2x^2 - 3x - 1$

$2x^2 - 2x + 4$

$-x - 5\ /$

entonces $\qquad C(x) = 2\ x +2$ y $R(x) = -\ x - 5$

se puede escribir $\qquad (2\ x^3 + x - 1) = (x^2 - x +2).\ (2\ x + 2) + (-\ x - 5)$

o también $\qquad (2\ x^3 + x - 1)/\ (x^2 - x +2) = (2\ x + 2) + (-\ x - 5)/\ (x^2 - x +2)$

- El procedimiento de división entre polinomios (algoritmo) es el siguiente:

1. se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente.

2. se multiplica éste por todo el divisor, y al resultado se lo resta del dividendo, obteniéndose el primer resto parcial.

3. se repite hasta llegar a un resto de grado menor que divisor.

- Un caso especial se da cuando el divisor es de la forma $(x \pm a)$, siendo a un número cualquiera. En estos casos puede aplicarse la **Regla de Ruffini**. El cociente que se obtiene es un grado menor que el dividendo. Los coeficientes se obtienen del siguiente modo:

1. El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo.

2. El segundo se obtiene multiplicando el coeficiente anterior por (-a), y sumándole el coeficiente del segundo término del dividendo; así se continúa con todos los coeficientes.

3. El resto se obtiene multiplicando el último coeficiente del cociente por -a y sumándole el término independiente del dividendo.

- Para el cálculo directo del resto cuando el divisor es de la forma $(x + a)$ se reemplaza en el dividendo a x por -a.

- Otro caso especial es el de la división de un polinomio por un binomio de la forma:

$(x^n \pm a^n): (x \pm a)$

Hay cuatro (4) casos posibles:

1. $(x^n+ a^n): (x +a)$ Sólo es posible cuando n es impar.
2. $(x^n+ a^n): (x - a)$ Nunca es divisible.
3. $(x^n - a^n): (x +a)$ Sólo es posible cuando n es par.
4. $(x^n - a^n): (x - a)$ Siempre es divisible.

- **Teorema del resto**: Al dividir P(x) en $(x - b)$, el resto de la división es el valor numérico del polinomio P(x) particularizado para $x = b$. Esto es: $R = P(b)$.

Ejemplo. Calcular el resto en la división de $P(x)= (-x^2+ 2x -1)$ en $Q(x)= (x - \sqrt{2})$

$R= P(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 3$

$R= 2\sqrt{2} - 3$

- La **raíz** a de un polinomio P(x) corresponde al valor de a que hace P(a)=0.

- Todo polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$ de grado n tiene al menos un cero complejo (**Teorema fundamental del Álgebra**)

- Todo polinomio que es **diferencia de cuadrados** es igual al producto de la diferencia de las bases de dichos cuadrados por la suma de las mismas, es decir: $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

- Dado que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, los trinomios de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$ (denominados **trinomios cuadrados perfectos**) se pueden factorizar como cuadrados de binomios.

Observaciones: $(-a - b)^2 = [-(a + b)]^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Para encontrar el binomio adecuado se procede del siguiente modo:

-Se buscan los dos términos cuadrados (a^2, b^2) y se determinan sus bases.

-Se comprueba que el término restante (2 a b) sea el doble de los cuadrados de las bases.

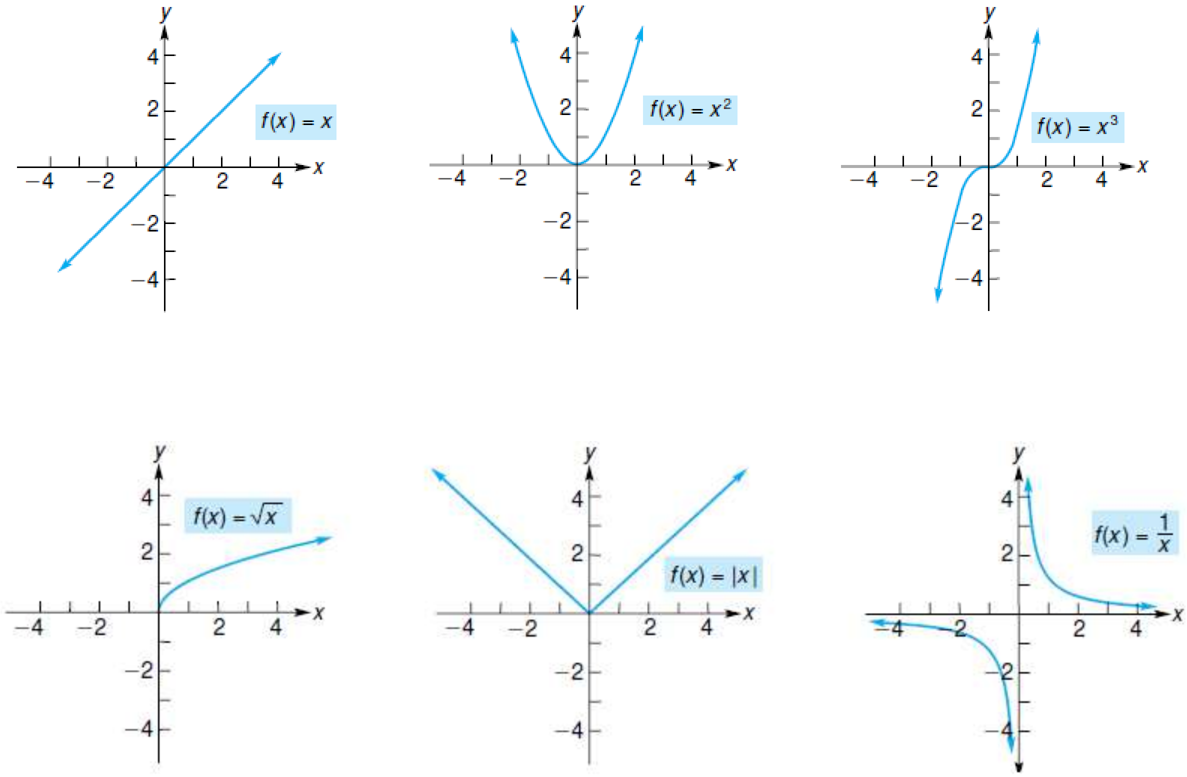
-Se analizan los signos y se determina si corresponde al cuadrado de una suma o al cuadrado de una diferencia.

- Las expresiones algebraicas irracionales (en las que las variables están afectadas por la radicación) se resuelven respetando las propiedades de la potenciación y de la radicación.
- Cuando las potencias de los factores del radicando son mayores al índice de la raíz, se pueden extraer factores fuera de la raíz.
- Si en el denominador de una fracción hay una raíz, se trata de buscar una expresión equivalente que no involucre a una raíz en esa posición, por medio de su racionalización. Para ello, se multiplica al numerador y al denominador por una expresión tal que permita eliminar

la raíz. En el caso de adición y sustracción de denominadores con raíces cuadradas, se utiliza multiplicar a ambos miembros por la expresión conjugada, haciendo uso de la propiedad de la diferencia de cuadrados.

Fórmulas de Factorización
$\boldsymbol{ab + ac = a(b + c)}$
$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$
$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$
$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$
$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b\right)^2}$
$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b\right)^2}$

Gráficas de funciones elementales



Un resumen de transformaciones de gráficas

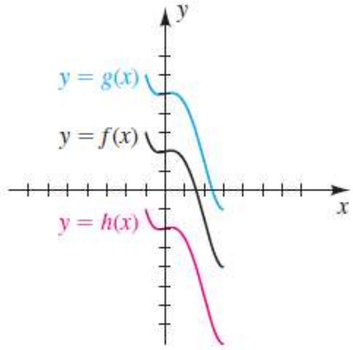
La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en negro en cada figura. El dominio de f es $[-1, 3]$ y el rango de f es $[-4, 3]$.

$y = g(x) = f(x) + 3$

La gráfica de f está desplazada verticalmente hacia arriba 3 unidades.
Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-1, 6]$

$y = h(x) = f(x) - 4$

La gráfica de f está desplazada verticalmente hacia abajo 4 unidades.
Dominio de h: $[-1, 3]$ Rango de h: $[-8, -1]$

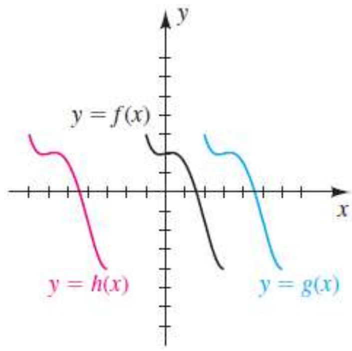


$$y = g(x) = f(x - 3)$$

La gráfica de f está desplazada horizontalmente a la derecha 3 unidades.
Dominio de g: $[2, 6]$ Rango de g: $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f(x + 6)$$

La gráfica de f está desplazada horizontalmente a la izquierda 6 unidades.
Dominio de h: $[-7, -3]$ Rango de h: $[-4, 3]$

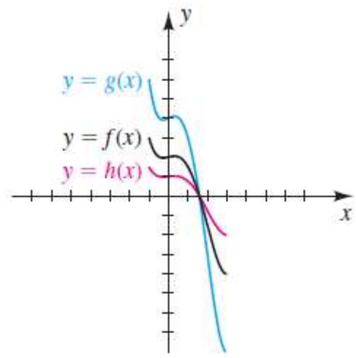


$$y = g(x) = 2f(x) \quad [2 > 1]$$

La gráfica de f está estirada verticalmente en un factor de 2.
Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-8, 6]$

$$y = h(x) = \tfrac{1}{2}f(x) \quad \left[\tfrac{1}{2} < 1\right]$$

La gráfica de f está comprimida verticalmente en un factor de 2.
Dominio de h: $[-1, 3]$ Rango de h: $\left[-2, \tfrac{3}{2}\right]$

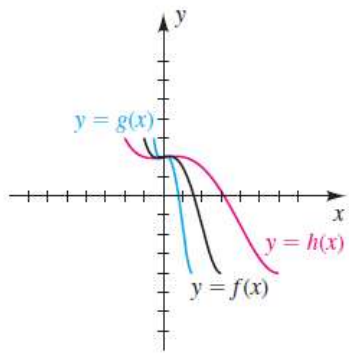


$$y = g(x) = f(2x) \quad [2 > 1]$$

La gráfica de f está comprimida horizontalmente en un factor de 2.
Dominio de g: $\left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right]$ Rango de g: $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f\left(\tfrac{1}{2}x\right) \quad \left[\tfrac{1}{2} < 1\right]$$

La gráfica de f está estirada horizontalmente en un factor de 2.
Dominio de h: $[-2, 6]$ Rango de h: $[-4, 3]$

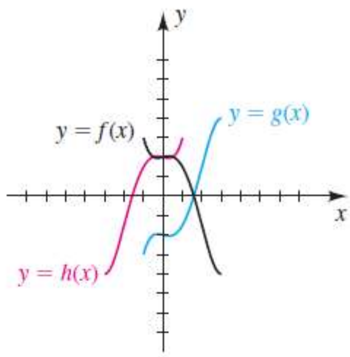


$$y = g(x) = -f(x)$$

La gráfica de f está reflejada pasando por el eje x.
Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-3, 4]$

$$y = h(x) = f(-x)$$

La gráfica de f está reflejada pasando por el eje y.
Dominio de h: $[-3, 1]$ Rango de h: $[-4, 3]$



$$y = g(x) = |f(x)|$$

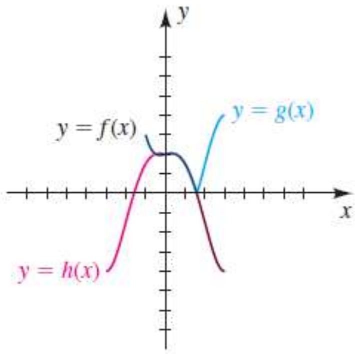
Refleja los puntos en f con valores x negativos pasando por el eje x.

Dominio of g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[0, 4]$

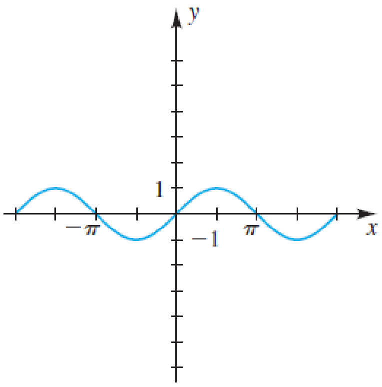
$$y = h(x) = f(|x|)$$

Refleja los puntos en f con valores x positivos pasando por el eje y.

Dominio of h: $[-3, 3]$ Rango de h: $[-4, 3]$ a lo sumo. En este caso, la imagen es un subconjunto de $[-4, 3]$.



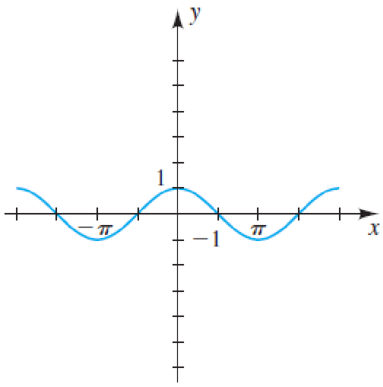
Gráficas de funciones trigonométricas y sus inversas



$y = \operatorname{sen} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

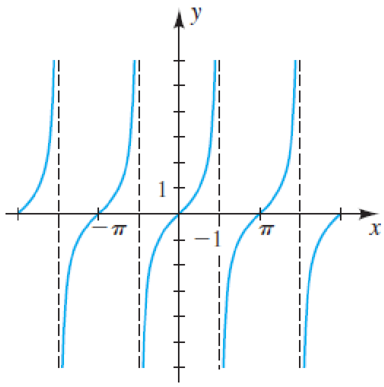
Rango: $[-1, 1]$



$y = \cos x$

Dominio: $\mathbb{R}$

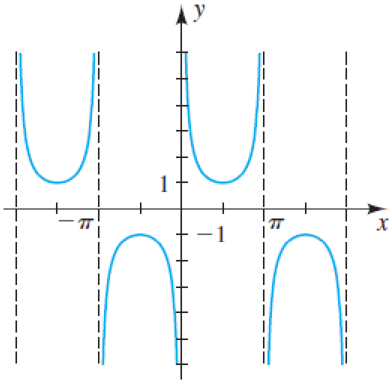
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$

Dominio: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

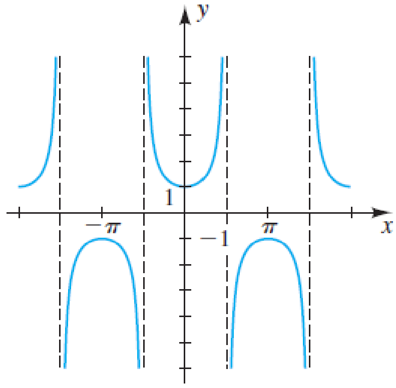
Rango: $\mathbb{R}$



$y = \csc x$

Dominio: $x \neq \pi n$

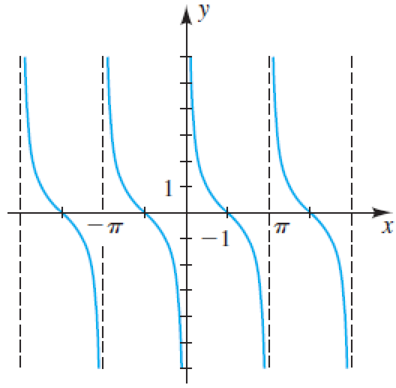
Rango : $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \sec x$

Dominio: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

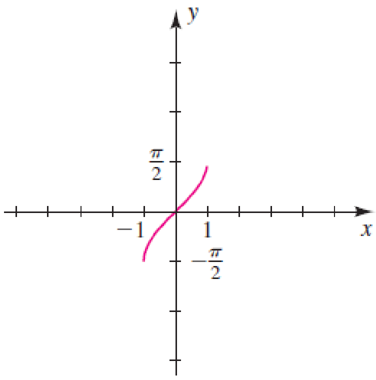
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \cot x$

Dominio: $x \neq \pi n$

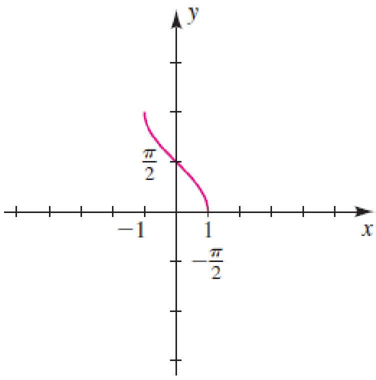
Rango: $\mathbb{R}$



$y = \operatorname{sen}^{-1} x$

Dominio: $[-1, 1]$

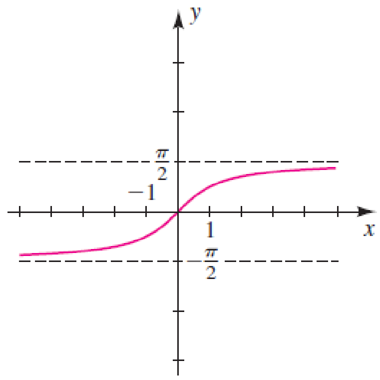
Rango: $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$



$y = \cos^{-1} x$

Dominio: $[-1, 1]$

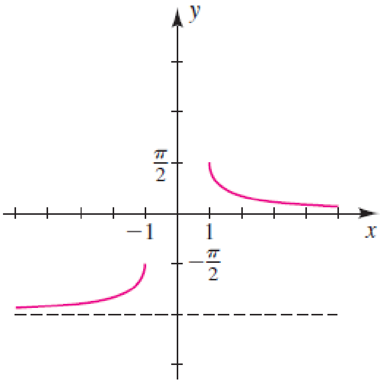
Rango: $[0, \pi]$



$y = \tan^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

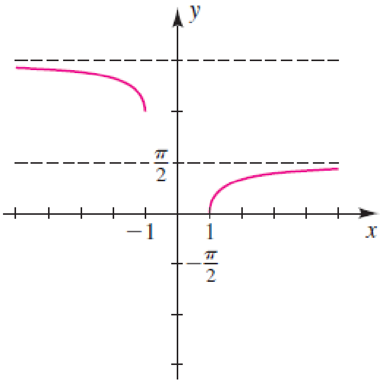
Rango: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$



$y = \csc^{-1} x$

Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

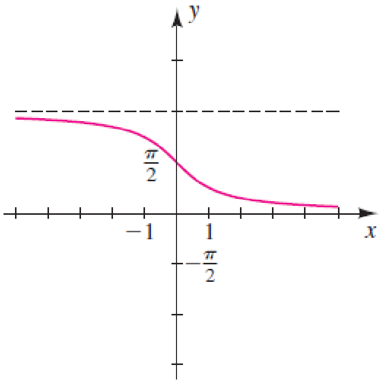
Rango: $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$



$y = \sec^{-1} x$

Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Rango: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

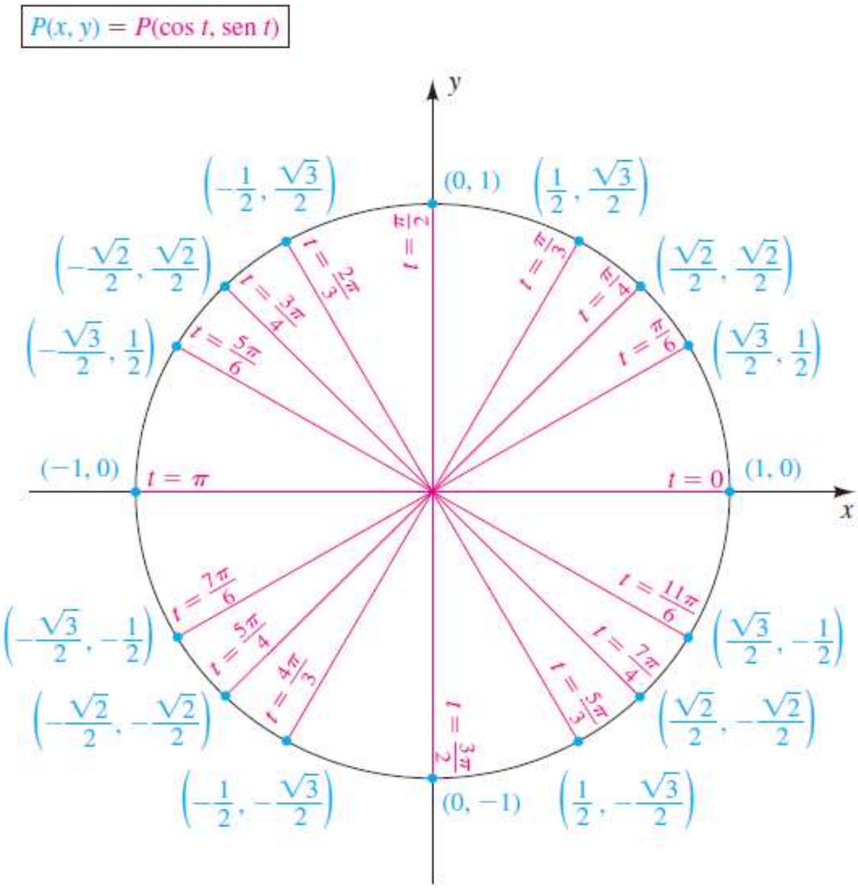


$y = \cot^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $(0, \pi)$

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales en una circunferencia unitaria



Para hallar los valores de las otras funciones trigonométricas, use las definiciones siguientes:

$$\tan t = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0)$$

$$\sec t = \frac{1}{x} \text{ (si } x \neq 0) \qquad \csc t = \frac{1}{y} \text{ (si } y \neq 0)$$

ANEXO V. ANÁLISIS, COMPRENSIÓN Y MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS FUNCIONALES

Introducción

La intención de esta propuesta en el desarrollo del Curso de Ingreso es desarrollar actitudes, hábitos y formas de pensamiento que mejoren la capacidad para resolver problemas.

Resolver un problema exige conocimiento, reflexión, razonamiento lógico y alguna dosis de ingenio, intuición y sagacidad. Hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de similar formación. Estas personas aplican, generalmente de una manera inconsciente, toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente adecuados para abordar problemas. Estas operaciones mentales se conocen como procesos heurísticos. **Una heurística es una regla práctica basada en la experiencia, sobre la cual no existe garantía.**

Los procesos heurísticos pueden adquirirse y **una persona puede aprender estrategias que aumentan su capacidad para resolver problemas** que de otra manera le hubieran resultado “difíciles”. **Una estrategia es un método general, una guía que puede aplicarse para hallar la resolución de muchas clases de problemas.** Existen diferentes estrategias para enfrentar la resolución de un problema. Algunas de las que vamos a explorar son:

- Hallar una representación gráfica que permita visualizar los datos del problema y sus relaciones.
- Identificar la similitud con otros problemas ya resueltos
- Reformular el problema
- Dividir el problema en varios sub-problemas más simples
- Razonar hacia atrás
- Partir de un supuesto

Cuando nos encontremos bloqueados ante un problema, estas estrategias pueden resultar una ayuda valiosa para encontrar el camino hacia la solución. Las estrategias no son alternativas sino complementos hacia la solución.

Por supuesto una estrategia no suple la falta de conocimientos específicos, ni transforma la resolución en un proceso algorítmico.

Es muy importante destacar que es posible que se llegue a la respuesta utilizando otros caminos. Es particularmente valiosa la reflexión acerca de cada alternativa de resolución del problema.

Objetivo general

El propósito fundamental es estimular el desarrollo de habilidades que resulten útiles para la resolución de problemas de cualquier dominio de aplicación, concibiéndolo como un espacio articulador en el Curso de Nivelación de Matemática.

Fundamentos y metodología propuesta

La resolución de problemas al facilitar el desarrollo de actitudes, hábitos y formas de pensamiento que mejoran las capacidades básicas permite un mejor desenvolvimiento no sólo en el ámbito académico, sino también en la vida cotidiana.

Definimos problema como el planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

Resolver un problema requiere tiempo y esfuerzo. El proceso de resolución puede resultar una experiencia placentera y motivadora, ya que tiene algo de descubrimiento, aumenta nuestro conocimiento, aporta nuevos puntos de vista, y mejora nuestra capacidad para resolver otros problemas en el futuro.

El desarrollo de estas capacidades va a requerir de ciertos conocimientos, pero también del entrenamiento que brinda el resolver situaciones que requieren de esfuerzo y perseverancia.

El proceso de resolución de un problema

Requiere recorrer tres etapas fundamentales

I- Analizar y comprender el problema.

En un problema pueden distinguirse tres componentes: los datos, la incógnita y un conjunto de reglas o restricciones que vinculan a los datos con la incógnita. El análisis de un problema comienza por lo tanto identificando estas componentes. Un problema se plantea por lo general mediante un enunciado que debe analizarse y comprenderse.

Pasos para el análisis y la comprensión de un problema

- Leer con detenimiento TODO el enunciado, a cargo del lector. Si la ansiedad lo llevó a leer superficialmente el enunciado del problema, nuestra sugerencia es volver a leerlo con mayor atención antes de pasar al próximo paso.
- Comprender claramente el significado de cada palabra y cada frase.
- Poner especial atención a los signos de puntuación, ya que de ellos depende el significado de cada frase.
- Identificar la incógnita.
- Identificar datos explícitos (puede haber relevantes o irrelevantes). *Un dato es relevante cuando es necesario para obtener solución del problema*
- Identificar datos implícitos (puede haber relevantes o irrelevantes) y hacerlos explícitos.
- Eliminar dobles negaciones o transformar negaciones en afirmaciones. *"no es cierto que lo que dijo es falso"*
- Detectar imprecisiones o ambigüedades, y resolverlas antes de seguir avanzando.
- Hacer inferencias a partir de los datos detectados y transformarlos en explícitos.
- Construir un enunciado simple y sencillo con los datos considerados relevantes.
- Verificar la equivalencia entre la especificación inicial y el enunciado obtenido.

II-. Construir la solución: En esta etapa se elige y se aplica una estrategia o un conjunto de estrategias combinadas.

III-. Verificar la solución: La etapa final es confrontar los resultados obtenidos con el problema planteado, verificando que la solución sea correcta.

No siempre se utilizarán todos los pasos, ni tampoco en este orden.

GLOSARIO

1. ***Ejercicio***: Actividad destinada a adquirir, desarrollar o conservar una facultad o cualidad que en el aprendizaje de ciertas disciplinas sirve de psíquica o física.
2. ***Trabajo práctico***: Complemento y comprobación de la enseñanza teórica.
3. ***Problema***: Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.
4. ***Acertijo***: Enigma o adivinanza que se propone como pasatiempo.
5. ***Enunciado:*** Secuencia finita de palabras delimitada por pausas muy marcadas, que puede estar constituida por una o varias oraciones.
6. ***Definición***: Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial.
7. ***Análisis***: Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos.
8. ***Comprensión***: Facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas.
9. ***Proceso***: Conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial.
10. ***Resolución:*** Acción hallar la solución de un problema.
11. ***Solución:*** Desenlace o término del proceso de resolución de un problema, tal que satisface las condiciones del enunciado.
12. ***Incógnita***: Causa o razón no conocida en un problema a resolver.
13. ***Razonar***: Discurrir, ordenando ideas en la mente para llegar a una
14. ***Pensar:*** Reflexionar, examinar con cuidado algo para formar dictamen.
15. ***Deducir:*** Inferir las consecuencias de un principio, proposición o supuesto.
16. ***Inferir:*** Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa.
17. ***Conjetura:*** Juicio probable de cierta cosa que se deduce por alguna señal
18. ***Hipótesis:*** Suposición, cierta o no, que permite sacar de ella una consecuencia.
19. ***Explícito:*** Que expresa clara y determinadamente una cosa.
20. ***Implícito:*** Incluido en otra cosa sin que esta lo exprese.

BIBLIOGRAFÍA

Lineamientos del seminario universitario. Resolución UTN CS Nº 865/2012.

Rojo, A (1996). Algebra I. Buenos Aires, Argentina. Editorial el Ateneo.

Swokowsky, E. Cole J. (2009). Algebra y trigonometría con geometría analítica. Editores Sengage Learning.

Chemello, G. Agrasar,M. Crippa,A. Diaz, A. Anexo teórico. Tercer ciclo EGB Matemática. Editorial Longseller

Larson, R. Edwards, B. Calculo de una variable. Calculo I. Editorial Mc. Graw Hill

Itzcovich, H. Rudy, M. (2011). El libro de las matemática 9. Editorial Estrada. Primera edición.

Dr Baldor, J. Geometría plana y del espacio trigonometría. Editora: Compañía Cultural y Distribuidora de Textos Americanos S.A . USA

Fernandez, E. Moretto, G. (2004). Matemática para el ingreso. Universidad Nacional del Litoral. Ediciones UNL.

Cadoche,L. Pastorelli, S. Malva, A. Burioni,J. Ramirez, S. Pre- universitaria. Universidad Nacional Del Litoral. Ediciones UNL

Haeussler, E. Richard, P. Matemáticas para administración y economía. Editorial Parcon Prentise Hall.

Cuadernillos.

Cuadernillo "Matemática Curso de ingreso 2014 teórico". (2014). Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Chubut.

Cuadernillo "Curso de apoyo en matemática". Universidad San Juan Bosco. Facultad de Ingeniería.

Cuadernillo "Curso de nivelación Matemática". (2016). Universidad Nacional del Sur. Departamento de matemática.

Cuadernillo "Ingreso matemática". (2010). Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional de Tucumán.

Cuadernillo "Ingreso matemática" (2011). Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Bahía Blanca.

Páginas Web consultadas

UTN, Facultad Regional Santa Fe. Nociones básicas de geometría. Recuperado de <http://www.frsf.utn.edu.ar>.

Escuela digital. Geometría, los cuerpos geométricos. Recuperado de
<http://www.escueladigital.com.uy/geometria/5_cuerpo.htm≠concepto>.